المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب المهني والتقني
الادارة العامة للتدريب المهني والأهلي
معهد التميز الكندي العالي للتدريب

الرياضيات

مقدمة

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده محمد بن عبدالله وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على الله ثم على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي؛ لتصل بعون الله تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية "رياضيات عامة (١١٣) " لمتدربي الكليات التقنية موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج _وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية_ تأمل من الله _عز وجل_ أن تسهم في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، مدعم بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

والله نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه، إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

الفهــرس

الموضــوع	رقم الصفحة
الوحدة الأولى : المعادلات والعمليات عليها	٨
١. المجموعات	١٠
تعريف المجموعة	١٠
رموز المجموعات وعناصرها	١٠
مجموعات الأعداد	١١
طرق تعريف المجموعات	١٢
المجموعة الجزئية	١٣
تساوي مجموعتين	١٣
المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية	١٤
تمارين (١- ١)	١٥
٢. العمليات على المجموعات	١٦
اتحاد مجموعتين	١٦
تقاطع مجموعتين	١٦
العلاقة بين الاتحاد والتقاطع	١٧
الفرق بين مجموعتين	١٧
متممة المجموعة	١٨
قانون ديمورغان	١٩
الفرق التناظري بين مجموعتين	١٩
تمارين (١- ٢)	٢٠
٣. العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية	٢١
العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد النسبية	٢١
العمليات الحسابية على الأعداد العشرية	٢٢

تقريب الأعداد العشرية	٢٤
بعض خواص الأعداد الحقيقية	٢٥
ترتيب العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية	٢٥
تعريف الأسس	٢٦
قوانين الأسس	٢٧
تمارين (١- ٣)	٢٩
الوحدة الثانية : كثيرات الحدود	٣٠
١. تعريف كثيرات الحدود	٣٢
٢. العمليات الحسابية على كثيرات الحدود	٣٣
جمع وطرح كثيرات الحدود	٣٣
ضرب كثيرات الحدود	٣٣
حساب قيمة كثير حدود عند قيمة معينة للمتغير	٣٤
قسمة كثيرات الحدود	٣٤
تمارين (٢- ١)	٣٥
٣. تحليل كثيرات الحدود	٣٦
طريقة المعامل المشترك الأكبر	٣٦
طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c	٣٧
طريقة تحليل فرق مربعين	٣٨
تمارين (٢- ٢)	٣٩
٤. الكسور الجبرية	٤٠
اختصار الكسور الجبرية	٤٠
تمارين(٢- ٣)	٤٣
الوحدة الثالثة : المحددات والمصفوفات	٤٥
١. تعريف المصفوفات	٤٧

تساوي مصفوفتين	٤٧
٢. العمليات على المصفوفات	٤٨
الجمع والطرح	٤٨
ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه	٤٨
ضرب صف في عمود	٤٩
ضرب مصفوفتين	٤٩
منقول المصفوفة	٥٢
٣. بعض المصفوفات الخاصة	٥٣
المصفوفة المربعة	٥٣
مصفوفة الوحدة	٥٣
المصفوفة الصفرية	٥٤
٤.تعريف المحددات	٥٥
حساب المحددات 2×2	٥٥
حساب المحددات 3×3	٥٥
٥. مقلوب المصفوفة	٥٨
تمارين(٣- ١)	٥٩
الوحدة الرابعة :المعادلات	٦١
الفصل الأول: المعادلات	٦٣
١. تعريف المعادلات	٦٣
٢. حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد	٦٤
تمارين (٤- ١)	٦٦
٣. حل المعادلات من الدرجة الثانية	٦٧
طريقة التحليل	٦٧
طريقة الجذر التربيعي	٦٨

طريقة القانون العام (طريقة المميز)	٦٨
تمارين(٤- ٢)	٧٠
الفصل الثاني : المعادلات الخطية	٧١
١. تعريف المعادلات الخطية	٧١
٢. المعادلات الخطية ذات مجهول واحد	٧٢
٣. جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين	٧٣
الحل بطريقة التعويض	٧٣
الحل بطريقة كرامير	٧٥
٤. جملة المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل	٧٨
تمارين(٤- ٣)	٨٠
الوحدة الخامسة : مفهوم الدالة ومنحناها	٨١
١. تعريف الدالة	٨٣
٢. أنواع الدوال	٨٧
٣. الدوال العددية	٨٩
٤ . منحنى الدالة	٩٠
٥. الدوال الجبرية	٩١
تمارين (٥- ١)	٩٤

تمهيد

الحمد لله مولي النعم، الحمد له على ما خصنا من نعمة وعمّ، والصلاة والسلام على خير العرب والعجم. أما بعد :فإن مقرر رياضيات عامة يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لمتدرب الكلية التقنية لتعليمه المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ارتئينا _خدمةً للأهداف التربوية_ إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصاً منا على إيصال المعلومة واضحةً للمتدرب، مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة المباشرة التي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح.

ودراسة هذا المقرر ستُمكّن المتدرب من:

- فهم المجموعات.
- فهم كثيرات الحدود.
- فهم المحددات والمصفوفات.
- كيفية حل بعض المعادلات الجبرية، و كيفية حل المعادلات الخطية واستخدام المحددات في حل المعادلات الخطية .
- فهم الدوال وكيفية تمثيلها بمنحنيات.

ولتحقيق هذه الأهداف _بإذن الله تعالى_ فقد قُسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى خمس وحدات رئيسة كما يلي :

الوحدة الأولى وتعتني بدراسة المجموعات والعمليات المختلفة عليها، وكذلك المجموعات العددية المشهورة .

أما الوحدة الثانية فقد خُصصت لتعريف المتدرب بكثيرات الحدود والعمليات عليها وكيفية تحليلها، وبالكسور الجبرية وكيفية اختصارها.

وأما الوحدة الثالثة فقد خصصت لدراسة المحددات وكيفية حسابها، والمصفوفات والعمليات عليها، وأخيراً كيفية حساب مقلوب مصفوفة مربعة.

أما الوحدة الرابعة فتهدف لمعرفة المتدرب بحلّ بعض المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى و الثانية، والمعادلات الخطية وكيفية حلها سواء ذات مجهول واحد أو ذات مجهولين أو ذات ثلاثة مجاهيل، وأخيراً كيفية استخدام المحددات لحلها.

أما الوحدة الخامسة فقد خُصصت لدراسة الدوال وأنواعها، والدوال العددية المشهورة كبعض الدوال الجبرية وكيفية تمثيل منحنياتها.

والله الموفق

الوحدة الأولى

المجموعات والعمليات عليها

الهدف العام:

معرفة مفهوم المجموعات والعمليات عليها ، والمجموعات العددية المشهورة و القيام بالعمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية .

الأهداف التفصيلية:

بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب من :

١. تعريف المجموعات وتحديد خصائصها.
٢. إجراء العمليات على المجموعات.
٣. تصنيف الأعداد حسب مجموعاتها العددية.
٤. القيام بالعمليات الحسابية في على الأعداد النسبية والعشرية .
٥. معرفة حساب الأسس وتقريب الأعداد العشرية .

١. المجموعات

١. ١. تعريف المجموعة .

تُعرَّف المجموعة رياضياً أو منطقياً بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تمييزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه.

مثال على ذلك المجموعات التالية:

أ- مجموعة الأعداد 2 , 4 , 6 , 8 , 10.

ب- مجموعة الاثني عشر شهرا في السنةالميلادية.

ج- مجموعة الأعداد الكبيرة .

د- مجموعة الحدائق الجميلة في المملكةالعربية السعودية.

ففيها نعتبر أ و ب مجموعتين؛ لأن عناصرها معروفة ومحددة، أما المجموعتان ج و د فلا نعتبرهما_ رياضياً_ مجموعتين؛ لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة، فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلى آخر . فإذن عناصر ج و د غير معروفة وغيرمحددة؛ ولذلك لا نعتبرهما مجموعتين.

وعندما ترد كلمة مجموعة في دراستنا اللاحقة نعني ضمنياً مجموعة رياضية.

١. ٢. رموزا لمجموعات وعناصرها :

عادةً ما نرمز للمجموعات (تسميتها) بحروف لاتينية كبيرة مثل: A , B , X, Y ... الخ بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل: a , b , x , y ...الخ. وعادةً ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من النوع {} وتوضع فواصل بينها. فبهذا التعريف نكتب المجموعة A التي عناصرها $-2 , 0 , 1 , \pi$ كالتالي:

$$A=\{-2,0,1,\pi\}$$

ولما كان 0 عنصراً من المجموعة A فإننا نرمز لذلك رياضياً بالعبارة $0\in A$ ونقرأها 0 ينتمي إلى A. أما العنصر 5 مثلاً فلا ينتمي إلى A ونعبر عن هذا بـ$5\notin A$ وتقرأ 5 لا ينتمي إلى A .

١. ٣. مجموعات الأعداد :

في دراستنا العلمية نحتاج للتعامل مع عدة مجموعات عددية، كل منها توسيع وامتداد لسابقتها وقد سبق للمتدرب دراستها في مراحل التعليم العام .

وفيما يلي تذكير وتأصيل لهذه المجموعات :

- **مجموعة الأعداد الطبيعية**

وهي مجموعة الأعداد الأساسية المألوف عليها ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N :

$$N=\{1,2,3,4..........\}$$

- **مجموعة الأعداد الكلية :**

وهي مجموعة الأعداد الطبيعية N مضافاً إليها العدد 0 ويرمز لها بالحرف W. وبمعنى آخر $W=N\cup\{0\}$ وتصبح:

$$W=\{0,1,2,3,4,.......\}$$

- **مجموعة الأعداد الصحيحة**

بإضافة مجموعة الأعداد السالبة إلى المجموعة W نحصل على مجموعة جديدة تُسمى مجموعة الأعداد الصحيحة ونرمز لها بالحرف Z ، إذن :

$$Z=\{.......-2,-1,0,1,2.......\}$$

- **مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية :**

وهي المجموعة التي تكون فيها الأعداد على شكل كسر عددين صحيحين (بسط ومقام) بشرط أن لا يساوي المقام فيها الصفر ونرمز لها بالحرف Q. وإذا كتبنا هذا التعريف بطريقة القاعدة المعينة تكون:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}:m\in Z,n\in Z,n\neq 0\right\}$$

نلاحظ هنا أن أي عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يمكن كتابته على شكل كسر بحيث يكون المقام في هذا الكسر العدد 1، فمثلاً $-2=\frac{-2}{1}$ وبشكل أعم $m=\frac{m}{1}$.

ملاحظة: العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{m}{n}$ حيث m و n أعداد صحيحة و $n\neq 0$ يسمى عدد غير نسبي فمثلا الأعداد التالية: $\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt[3]{6}$ كل منها عدد غير نسبي ويرمز لمجموعة الأعداد الغير نسبية بالرمز I

- **مجموعة الأعداد الحقيقية**

مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نرمز لها بالرمز R تحتوي على مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الكلية والأعداد الصحيحة والأعداد النسبية بالإضافة إلى الأعداد غيرالنسبية. وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الطريقة التي عرفنا بها المجموعة Q سابقا مثل $\sqrt{2}$ و π

١. ٤. طرق تعريف المجموعات :

هناك ثلاث طرق لتعريف المجموعة، وهي كما يلي:

- **طريقة التعريف بعبارة:**

في هذه الطريقة نكتفي بذكر عبارة معينة يمكن عندها تحديد عناصر المجموعة فمثلاً نقول A هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة.

- **طريقة السرد أو حصر العناصر:**

وفيها نقوم بذكر جميع عناصر المجموعة. فمثلاً A مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين 1 و 9 هي:

$$A=\{2,4,6,8\}$$

علماً أن هذه الطريقة غير مناسبة إلا للمجموعات قليلة العناصر، فمثلاً لا يمكن سرد كل عناصر مجموعة الأعداد الزوجية . ونلاحظ أن ترتيب العناصر غير مهم في المجموعة، فإن المجموعة أعلاه هي أيضا المجموعة: $A=\{4,6,2,8\}$ كما نلاحظ كذلك أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة، فمثلاً المجموعة أعلاه هي أيضاً المجموعة $A=\{2,4,4,6,8,2\}$

- **طريقة القاعدة المعينة:**

وفيها يكون تسلسل العناصر له نمط ظاهر، بحيث يمكن التعبير عنه بقاعدة معينة. فمثلاً المجموعة $A=\{2,4,6,8\}$ يمكن كتابتها بالقاعدة التالية:

$A=\{x : x\in N\ ,\ x \text{ زوجي }\ ,\ 2\le x\le 8\}$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية.

وتقرأ A هي المجموعة المكونة من العناصر x ، حيث إن x عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي 2 وأصغر من أو يساوي 8.

١. ٥. المجموعة الجزئية :

نقول إن B هي مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت محتواة في A، أو بمعنى آخر إن جميع عناصر B موجودة في المجموعة A ونرمز لهذا كالتالي: $B \subseteq A$

ويمكن كتابتها رياضياً كالتالي:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$ ($\forall$: يقرأ مهما يكون)

إذا كانت $B \subseteq A$ و $A \neq B$ فنقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $B \subset A$. أما إذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$

مثال١: لتكن المجموعات التالية: $C = \{3,11,12\}$ $B = \{5,24\}$ $A = \{3,5,11,24\}$

نلحظ في هذا المثال عند مقارنة B و C مع A أن: $B \subset A$ لاكن $C \not\subset A$ لأن العدد 12 لا ينتمي إلى A.

ملحوظة :

من تعريف مجموعة الأعداد نلاحظ أن N مجموعة جزئية من W و W مجموعة جزئية من Z و Z مجموعة جزئية من Q و Q مجموعة جزئية من R، أي باستخدام رمز الاحتواء يكون لدينا:

$$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$$

١. ٦. تساوي مجموعتين :

نقول إن المجموعتين A و B متساويتان، ونكتب $A = B$ إذا كانت كل منها مجموعة جزئية من الآخر، أي أن:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ و } \forall x \in B \Rightarrow x \in A$$

مثال٢: هل المجموعتان التاليتان متساويتان ؟

$$A = \{0,1\}, \qquad B = \{x : x \in W, x^2 - x = 0\}$$

الحل:

عناصر المجموعة A معروفة ومحددة ولكن عناصر المجموعة B غير محددة فيجب علينا إذن تحديد عناصرها و يتم ذلك بحل المعادلة المعطاة:

$$x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x - 1 = 0 \ , \ x = 1$$

إذن : $B = \{0,1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$

١. ٧. المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية :

عند دراسة أي ظاهرة علمية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة. فمثلاً يمكن أن نصنف جميع طلبة الكلية كمجموعة أساسية، بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة هي مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية. نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية المجموعةَ الشاملة و نرمز لها بالرمز U فمثلاً تعتبر المجموعة $U=\{-5,2,7,21\}$ هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات $A=\{2,21\}$ و $B=\{-5,7,21\}$ لأن المجموعات A و B مجموعات جزئية من U

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$. فمثلاً المجموعة $A=\{x : x<0 \text{ و } x>0\}$ هي مجموعة خالية لأنه ليس هناك أي عنصر يحقق الشرط المذكور. فمفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد. وتعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى.

خصائص المجموعة الجزئية :

$$1)\phi\subseteq A\subseteq U, \qquad 2)A\subseteq A,$$
$$3)A\subseteq B \text{ و } B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C, \quad 4)A=B\Rightarrow A\subseteq B \text{ و } B\subseteq A$$

تمارين (١- ١)

تمرين ١: أي من الجمل التالية تحدد مجموعة رياضية:

أ- مجموعة القاعات الكبيرة داخل الكلية.

ب- مجموعة المسلمين الذين شهدوا غزوة بدر.

ج- مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 5 .

د- مجموعة الأعداد الطبيعية التي هي أكبر من 1 وأصغر من 2.

ه- مجموعة الطلبة الأذكياء في الكلية.

تمرين ٢: اذكر عناصر المجموعات التالية :

$1)\, A=\{x: x\in N, 3<x<12\}$, $2)\, B=\{x: x\in N, x \text{ فردي}, 3\le x<11\}$,

$3)\, C=\{x: x\in N, 4x-3=1\}$, $4)\, D=\{x: x\in N, x+1=0\}$,

$5)\, E=\{x: x=5n-6, n\in N, 1\le n<5\}$, $6)\, F=\{x: x\in N, \sqrt{x^2+1}=2\}$.

تمرين ٣: عبِّر عن المجموعات التالية بقاعدة معينة:

$1)\, A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, $2)\, B=\{0,4,8,12,16........\}$,

$3)\, C=\{....-10,-5,0,5,10.......\}$, $4)\, D=\{1,4,9,16,25,36,49\}$

تمرين ٤: لتكن المجموعات التالية:

$A=\{1\}, B=\{1,3\}, C=\{1,3,5\}, D=\{1,2,3,4,5\}, E=\{1,3,5,7,9\}, U=\{1,2,....,8,9\}$

املأ الفراغات التالية بالرمز المناسب حسْب المجموعات السابقة :

$1)\, \phi.....A,\quad 2)\, A.....B,\quad 3)\, B.....C,\quad 4)\, B.....E,$

$5)\, C.....D,\quad 6)\, C.....E,\quad 7)\, D....E,\quad 8)\, D.....U$

تمرين ٥: هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

$1)\, a=\{a\},\quad 2)\, 5\in\{5\},\quad 3)\, 9\in\{1,3,6,....\},\quad 4)\, \phi\subseteq A,$

$5)\, A\not\subset U,\quad 6)\, \phi\in\{\phi\},\quad 7)\, 4\in\{1,2,3,\{4\}\},\quad 8)\, 7\notin\{3,4,2,\{5\}\}.$

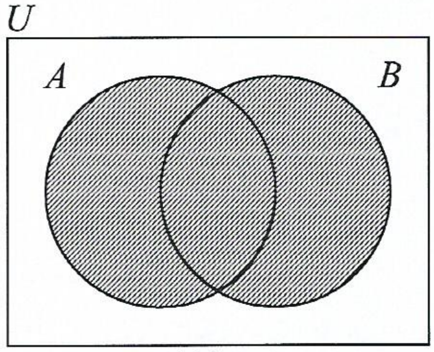
٢. العمليات على المجموعات .

٢. ١. اتحاد مجموعتين :

إذا كانت A و B مجموعتين فإن اتحادهما هو مجموعة جميع العناصر الموجودة في كل من A أو B أو كليهما ، ونرمز لهذه العملية بالرمز $A \cup B$ ، ونعرفها رياضياً كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

ويمكن تمثيل ذلك بأشكال توضيحية تسمى أشكال"فن"حيث تمثل المجموعة الشاملة U بالمستطيل والمجموعتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون اتحادهما المنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم التالي:



$A \cup B$

مثال٣:إذا كانت المجموعتان $B = \{2,4,6\}$ $A = \{1,2,3,5\}$ إذن: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

خصائص الاتحاد :

1) $A \cup A = A$,		2) $A \cup \phi = A$,

3) $A \cup U = U$,		4) $A \subseteq (A \cup B)$, $B \subseteq (A \cup B)$,

5) $A \cup B = B \cup A$,		6) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

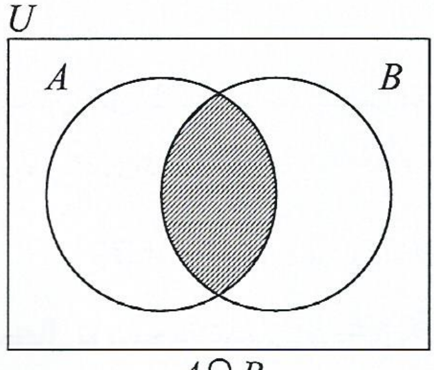
الخاصية 5 هي الخاصية التبادلية، والخاصية 6 هي الخاصية التجميعية.

٢. ٢. تقاطع مجموعتين :

إذا كانت A و B مجموعتين فإن تقاطعهم هي مجموعة العناصر المشتركة بين A و B ونرمز للتقاطع بالرمز $A \cap B$ ونعرفه كما يلي:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

ويُمثَّل تقاطع مجموعتين بأشكال "فن" بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم التالي:



$A \cap B$

مثال٤: إذا كانت المجموعتان: $A=\{x: x\in N, x\geq 6\},\ \ B=\{x: x\in N, x\geq 11\}$ إذن:

$$A\cap B=\{x: x\in N, x\geq 11\}$$

خصائص التقاطع :

$1)\ A\cap A=A,\qquad 2)\ A\cap\phi=\phi,$

$3)\ A\cap U=A,\qquad 4)\ (A\cap B)\subseteq A\ ,\ (A\cap B)\subseteq B,$

$5)\ A\cap B=B\cap A,\qquad 6)\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

الخاصية 5 هي الخاصية التبادلية، والخاصية 6 هي الخاصية التجميعية.

٢ . ٣. العلاقة بين الاتحاد والتقاطع (قانون التوزيع) :

إذا كانت $A\ ,\ B\ ,\ C$ ثلاث مجموعاتفإنّ:

1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (أي أنّالاتحاد توزيعي على التقاطع)

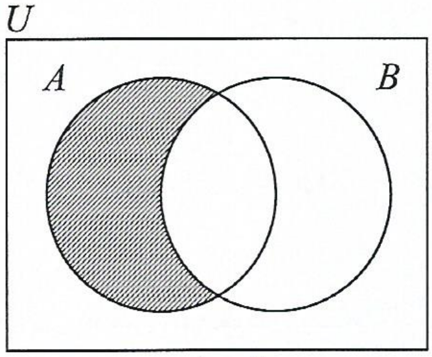
2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (أي أنّ التقاطع توزيعي على الاتحاد)

٢ . ٤. الفرق بين مجموعتين :

نُعرِّف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A بأنه مجموعة العناصر التي هي موجودة في A وفي نفس الوقت ليست موجودة في B ، ويرمز لهذا الفرق بالرمز $A-B$ ونكتب رياضياً :

$$A-B=\{x: x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

ويمثل الفرق بين مجموعتين بأشكال" فن" بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم التالي:



$A-B$

مثال٥: إذا كانت المجموعتان: $A=\{1,5,6,12,20\},\ B=\{3,6,12,18,20\}$ إذن:

$$A-B=\{1,5\},\quad B-A=\{3,18\}$$

خصائص الفرق :

$$1)\,A-A=\phi,\qquad 2)\,A-\phi=A,$$
$$3)\,A-U=\phi,\qquad 4)\,A-B=B-A\Leftrightarrow A=B,$$
$$5)\,A-B=A\Leftrightarrow A\cap B=\phi,\qquad 6)\,A-B=\phi\Leftrightarrow A\subseteq B.$$

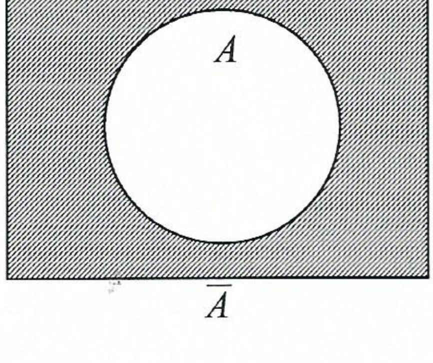
٢. ٥. متممة المجموعة :

إذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A ، نُعرِّف متممة A بأنها مجموعة العناصر الموجودة في U وفي نفس الوقت ليست موجودة في A (أي بمعنى آخر $U-A$).

ونرمز لمتممة A بالرمز $\overline{A}$ وتكون:

$$\overline{A}=U-A=\{x:x\in U \text{ و } x\notin A\}$$

وتمثل بأشكال "فن" بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم التالي:



$\overline{A}$

مثال ٦ : إذا كانت المجموعتان: $A=\{1,2,3\}$, $U=N=\{1,2,3,4.....\}$ إذن :

$$\overline{A}=\{4,5,6.....\}$$

خصائص المتممة :

$$1)\overline{A}\cup A=U,\quad 2)\overline{A}\cap A=\phi,\quad 3)\overline{\phi}=U,\quad 4)\overline{U}=\phi,\quad 5)\overline{\overline{A}}=A.$$

٢. ٦. قانون ديمورغان :

إذا كانت A و B مجموعتين ضمن المجموعة الشاملة U عندئذ يتحقق التالي:

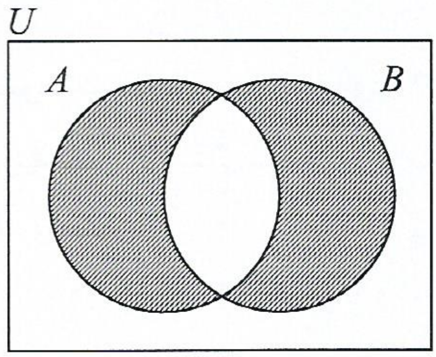
$$1)\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad 2)\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

٢. ٧. الفرق التناظري بين مجموعتين :

نُعرِّف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B بأنه مجموعة العناصر الموجودة إما في A أو B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعنى آخر العناصر الموجودة قي اتحاد المجموعتين و في نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع. ونرمز لهذا الفرق التناظري بالرمز $A\oplus B$

$$A\oplus B=\{x:x\in A\cup B \text{ و } x\notin A\cap B\}$$

ويمثل بأشكال "فن" بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالرسم التالي :



$A\oplus B$

مثال ٧ : إذا كانت المجموعتان: $B=\{2,4,a,b\}$ $A=\{2,3,4,5\}$ إذن: $A\oplus B=\{3,5,a,b\}$

خصائص الفرق التناظري:

$$1)A\oplus A=\phi,\quad 2)A\oplus\phi=A,\quad 3)A\oplus U=\overline{A},\quad 4)A\oplus B=B\oplus A\ ,$$
$$5)A\oplus B=(A-B)\cup(B-A),\quad 6)A\oplus B=\phi\Leftrightarrow A=B$$

تمارين (١- ٢)

المجموعات المشار إليها في تمرين ١ إلى ٣ هي المجموعة الشاملة $U=\{1,2,...,9\}$ والمجموعات التالية:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ $\quad B=\{4,5,6,7\}$ $\quad C=\{5,6,7,8,9\}$

$D=\{1,3,5,7,9\}$ $\quad E=\{2,4,6,8\}$ $\quad F=\{1,5,9\}$

تمرين ١: أوجد:

$a) A\cup B$ و $A\cap B$ $\quad b) B\cup D$ و $B\cap D$ $\quad c) A\cup C$ و $A\cap C$

$d) D\cup E$ و $D\cap E$ $\quad e) E\cup F$ و $E\cap F$ $\quad f) D\cup F$ و $D\cap F$

تمرين ٢: أوجد:

$a)\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ $\quad b) A-B$ $\quad c) B-A$ $\quad d) D-E$

$e) F-D$ $\quad f) A\oplus B$ $\quad g) C\oplus D$ $\quad h) E\oplus F$

تمرين ٣: أوجد:

$a) A\cap(B\cup E)$ $\quad b)\overline{A-E}$ $\quad c)\overline{A\cap D}-B$ $\quad d)(B\cap F)\cup(C\cap E)$

تمرين ٤: اختصر ما يلي:

$a) A\cap(B\cap\overline{A}),\quad b)(\overline{A}\cup\phi)\cup A,\ c)(A\cup B)\cap\overline{B}\quad d)(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$

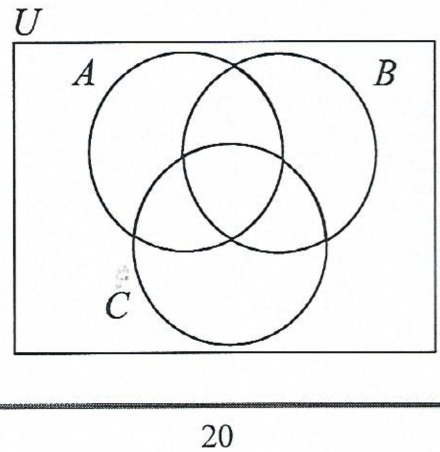
$e)(\overline{A\cup \mathbf{B}})\cup(\overline{A}\cap B),\quad f)(A\cup B)\cup\overline{A},\quad g)(A\cap U)\cup\overline{A}$

تمرين ٥: لتكن A و B مجموعتان، باستخدام أشكال فن ، ظلل $A\cap\overline{B}$ و $\overline{B-A}$ في كل من الحالات لتالية:

$a) A\cap B\neq\phi$ $\quad b) A\cap B=\phi$ $\quad c) B\subset A$

تمرين ٦: الرسم التالي يبين ثلاث مجموعات A,B,C. ظلل التالي:

$a) A-(B\cup C)$ $\quad b)\overline{A}\cap(B\cup C)$ $\quad c)\overline{A}\cap(C-B)$



٣. العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية

٣. ١. العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد النسبية :

٣. ١. ١. عملية الجمع والطرح

١) إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{b} \in Q$ فإن:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

٢) إذا كانت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d} \in Q$ فإن:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

مثال ٨: احسب ما يلي:

$$1)\frac{2}{9}+\frac{5}{9}, \qquad 2)\frac{7}{11}-\frac{2}{11}, \qquad 3)\frac{2}{9}+\frac{5}{4},$$

$$4)\frac{9}{11}-\frac{2}{7}, \qquad 5)\ \frac{17}{36}+\frac{7}{27}, \qquad 6)\ \frac{23}{15}-\frac{13}{24}$$

الحل:

$$1)\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+5}{9}=\frac{7}{9}, \qquad 2)\frac{7}{11}-\frac{2}{11}=\frac{5}{11}$$

$$3)\frac{2}{9}+\frac{5}{4}=\frac{2\times4+5\times9}{9\times4}=\frac{8+45}{36}=\frac{53}{36}, \qquad 4)\frac{9}{11}-\frac{2}{7}=\frac{9\times7-2\times11}{11\times7}=\frac{63-22}{77}=\frac{41}{77}$$

$$5)\ \frac{17}{36}+\frac{7}{27}$$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات يساوي 108 ومنه :

$$\frac{17}{36}+\frac{7}{27}=\frac{17\times3}{36\times3}+\frac{7\times4}{27\times4}=\frac{51}{108}+\frac{28}{108}=\frac{79}{108}$$

$6)\ \frac{11}{15}-\frac{13}{24}$

المضاعف المشترك الأصغر للمقامات يساوي120ومنه

$$\frac{23}{15}-\frac{13}{24}=\frac{11\times 8}{15\times 8}-\frac{13\times 5}{24\times 5}=\frac{88}{120}-\frac{65}{120}=\frac{88-65}{120}=\frac{23}{120}$$

٣. ١. ٢. عملية الضربو القسمة :

١) **عملية الضرب:**

اذا كانت $\frac{a}{b}$ و$\frac{c}{d} \in Q$ فإن: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

لحساب حاصل ضرب كسرين نضرب البسط في البسط والمقام في المقام .

٢) **عملية القسمة:**

اذا كانت $\frac{a}{b}$ و$\frac{c}{d} \in Q$ و $c\neq 0$ فإن: $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$

لحساب حاصل قسمة كسرين نحول القسمة الى ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني ثم نضرب البسط في البسط والمقام في المقام .

مثال ٩: احسب ما يلي:

$$1)\frac{2}{3}\times\frac{4}{5},\qquad 2)\frac{7}{9}\times\frac{2}{5},\qquad 3)\frac{3}{5}\div\frac{2}{7},\qquad 4)\frac{7}{9}\div\frac{2}{5}$$

الحل:

$$1)\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15},\qquad 2)\frac{7}{9}\times\frac{2}{5}=\frac{7\times 2}{9\times 5}=\frac{14}{45}$$

$$3)\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\times\frac{7}{2}=\frac{3\times 7}{5\times 2}=\frac{21}{10},\qquad 4)\frac{7}{9}\div\frac{2}{5}=\frac{7}{9}\times\frac{5}{2}=\frac{7\times 5}{9\times 2}=\frac{35}{18}=1\frac{17}{18}$$

٣. ٢. العمليات الحسابية على الأعداد العشرية .

٣. ٢. ١. جمع وطرح الأعداد العشرية :

يتم جمع أوطرح الأعداد العشرية بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات، حيث أن ذلك لا يؤثر في قيمة العدد العشري، ثم نجمع أو نطرح الأعداد في الخانات المتناظرة كما في جمع أو طرح الأعداد الصحيحة مع الاحتفاظ بموضع الفاصلة العشرية.

مثال١٠: احسب ما يلي:

$$1)27.345+49.57+0.436,\quad 2)19.7694-5.835$$

الحل:

$$1)27.345+49.57+0.436=77.351,\qquad 2)19.7694-5.835=13.9344$$

٣. ٢. ٢. ضرب الأعداد العشرية :

لضرب عددين عشرين نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية ثم نضع الفاصلة العشرية بحيث يكون عدد الخانات العشرية في ناتج الضرب يساوي مجموع عدد الخانات العشرية للعددين العشريين .

فمثلاً لإجراء عملية الضرب 3.7×3.25 نجري أولاً $325\times37=12025$ وحيث أن مجموع الخانات العشرية في العددين المضروبين هو $2+1=3$ فنحدد الفاصلة في ناتج الضرب بثلاث خانات ابتداءً من يمين العدد لنحصل على : $3.25\times3.7=12.025$

٣. ٢. ٢. قسمة الأعداد العشرية :

لقسمة الأعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات و نلغي الفواصل، ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حتى يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف الى يمينه صفراً مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر الى القاسم كلما أصبح أقل من المقسوم عليه كما في المثال التالي:

لإجراء عملية القسمة $21.556\div6.8$

نوحد عدد الخانات العشرية ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل قسمة $21556\div6800$ والتي نجريها كما يلي:

$$\begin{array}{r|r}
 & 3.17 \\
\hline
6800 & 21556 \\
 & -\ 20400 \\
\hline
 & 11560 \\
 & -\ 6800 \\
\hline
 & 47600 \\
 & -\ 47600 \\
\hline
 & 00000
\end{array}$$

وبذلك فإن الناتج هو: $21.556\div6.8=3.17$

مثال ١١: أوجد ناتج ما يلي:

$$1)327.345\times 409.67\ \ ,\ \ 2)130.4224\div 15.38\ \ ,\ \ 3)\ 427.6524\div 0.49$$

الحل:

$$1)\ 327.345\times 409.67=134103.4262$$
$$2)\ 130.4224\div 15.38=8.48$$
$$3)\ 427.6524\div 0.49=872.76$$

٣. ٢. ٤. تقريب الأعداد العشرية :

لتقريب عدد عشري إلى منزلة محددة نتبع ما يلي:

إذا كان الرقم الذي على يمين المنزلة مباشرة أقل من العدد 5 نحذفه مع جميع الأرقام الواقعة عن يمينه.

وإذا كان الرقم الذي على يمين المنزلة مباشرة أكبر أو يساوي العدد 5 فنضيف 1 إلى رقم المنزلة المحددة و نحذف جميع الأرقام الواقعة عن يمينه.

مثال١٢: قرب العدد 27.8256 إلى:

١- أقرب عدد صحيح

٢- أقرب 0.1

٣- أقرب 0.01

٤- أقرب 0.001

الحل:

١- أقرب عدد صحيح هو 28

٢- أقرب 0.1هو 27.8

٣- أقرب 0.01هو 27.83

٤- أقرب 0.001هو 27.826

٣ . ٣. بعض خواص الأعداد الحقيقية :

إذا كانت a,b,c أعداداً حقيقيةً فسيكون لدينا ما يلي:

١) عملية الجمع تبديليه: $a+b=b+a$

٢) عملية الجمع تجميعية: $a+(b+c)=(a+b)+c$

٣) عملية الضرب تبديليه: $ab=ba$

٤) عملية الضرب تجميعية: $a(bc)=(ab)c$

٥) عملية الضرب توزيعية بالنسبة للجمع: $a(b+c)=ab+ac$

٦) إذا كان $a=b$ فإن $a+c=b+c$ و $ac=bc$

٧) الصفر عنصر حيادي بالنسبة للجمع: $a+0=0+a=a$

٨) العدد 1 عنصر حيادي بالنسبة للضرب: $a\times 1=1\times a=a$

٩) لكل عدد حقيقي a يوجد عدد حقيقي يرمز له $(-a)$ يسمى نظير a حيث إن

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

١٠) إذا كان $a\neq 0$ فإنه يوجد عدد يرمز له $a^{-1}=\frac{1}{a}$ يسمى معكوس a حيث إن

$$a\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)a=1$$

٣ . ٤. ترتيب العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية :

لمنع حدوث خطأ أو التباس أثناء حل المسائل نستخدم ترتيب العمليات الحسابية كما يلي:

١) نحسب القوى و الجذور.

٢) نقوم بعملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئين من اليسار إلى اليمين.

٣) نقوم بعملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئين من اليسار إلى اليمين.

ملحوظات مهمة :

١- إذا كان في المسألة الحسابية أقواس فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً وهو ما يسمى بفك الأقواس.

٢- نقوم بالعمليات الموجودة فوق و تحت خط الكسر أي في البسط والمقام كلاً على حدة .

مثال ١٣: احسب ما يلي:

$1)\, 8.7+5.4-7=,\quad 2)\, 11.25-22.3+1.7,\quad 3)\, 4.2-(-6),$

$4)\, 122.5-(6.3-9.5),\quad 5)\, 3.5+(5.2-8),\quad 6)\, \dfrac{125+7-132}{3-5+8}$

$7)\, 8.2+3.84\div 3.2,\quad 8)\, \dfrac{7.2-15(3.4+2.3)}{116.8+6\times 3.7},\quad 9)\, 0.81\div(0,9\times 0.1)$

الحل:

$1)\, 8.7+5.4-7=14.1-7=7.1,$

$2)\, 11.25-22.3+1.7=-11.05+1.7=-9,35,$

$3)\, 4.2-(-6)=4.2+6=10.2,$

$4)\, 122.5-(6.3-9.5)=122.5-(-3.2)=122.5+3.2=125.7,$

$5)\, 3.5+(5.2-8)=3.5+(-2.8)=3.5-2.8=0.7,$

$$6)\, \frac{125+7-132}{3-5+8}=\frac{132-5}{-2+8}=\frac{132-132}{-2+8}=\frac{0}{6}=0$$

$7)\, 8.2+3.84\div 3.2=8.2+1.2=9.4,$

$$8)\, \frac{7.5-15(3.4+2.3)}{116.8+6\times 3.7}=\frac{7.5-15\times 5.7}{116.8+22.2}=\frac{7.5-85.5}{139}=\frac{-78}{139}=-\frac{78}{139}$$

$9)\, 0.81\div(0,9\times 0.1)=0.81\div 0.09=9$

٣. ٥. الأسس

٣. ٥. ١. تعريف الأسس :

تعريف١: إذا كان لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فسيكون x أس n هو:

$$x^n = x\times x\times\cdots\times x \quad n \text{ مرة}$$

بينما: $x^0=1$

- الرمز x^n يسمى القوة n للعدد x ويقرأ x أس n أو x مرفوع للقوة n
- في الرمز x^n. العدد x يسمى الأساس و العدد n يسمى الأس.

مثال١٤: احسب كلا مما يلي:

$1)\, 3^2\quad 2)\, (-2)^4\quad 3)\, (-3)^3,\quad 4)\, -2^2,$

$5)\, 5\times 2^4,\quad 6)\, (2+3^2)(4^3-3^2),\quad 7)\, 2\times 3^5-2^3+17$

الحل:

$$1)\ 3^2 = 3\times 3 = 9$$
$$2)\ (-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16$$
$$3)\ (-3)^3 = (-3)\times(-3)\times(-3) = -27$$
$$4)\ -2^2 = -(2^2) = -4$$
$$5)\ 5\times 2^4 = 5\times 16 = 80$$
$$6)\ (2+3^2)(4^3-3^2) = (2+9)(64-9) = (11)(55) = 605$$
$$7)\ 2\times 3^5 - 2^3 + 17 = 2\times 243 - 8 + 17 = 486 - 8 + 17 = 478 + 17 = 495$$

تعريف ٢: إذا كان لدينا عدد حقيقي $x \neq 0$ وعدد طبيعي n فسيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مثال ١٥: احسب كلاً مما يلي: $1)\ 3^{-2},\quad 2)\ (-2)^{-4},\quad 3)\ (-3)^{-3}$

الحل:

$$1)\ 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$
$$2)\ (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$
$$3)\ (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27}$$

٣ . ٥ . ٢ . قوانين الأسس :

إذا كان كل من x و y عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر، وكان كل من n و m عدداً صحيحاً فإن:

$$1)\ (x^n)^m = x^{nm},\qquad 2)\ (x\,y)^n = x^n y^n$$
$$3)\ x^n x^m = x^{n+m},\qquad 4)\ \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$
$$5)\ \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n},\qquad 6)\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$
$$7)\ \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n,\qquad 8)\ x^0 = 1$$

ملحوظة:

الأسس لا تتوزع على عمليتي الجمع والطرح: $(x\pm y)^n \neq x^n \pm y^n$

مثال ١٦: احسب كلاً مما يلي:

$$1)\ (xy)^{-2},\quad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2,\quad 3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}},\quad 4)\ 5^2 5^3$$

$$5)(-3)^2(-3)^3,\quad 6)\left(\frac{2}{9}\right)^0,\quad 7)-5^{-2},\quad 8)\left(\frac{2}{9}\right)^{-3},$$

$$9)\frac{-2^4}{2^5},\quad 10)(-3t)^{-2},\quad 11)\ 5(0.1)^{15}(10^{-2}\times 100^4)^3,\quad 12)\frac{15(.001)^{-2}\times 1000^2}{3(0.01)^{-5}\times 10^9}$$

الحل:

$$1)\ (xy)^{-2}=\frac{1}{(xy)^2}=\frac{1}{x^2y^2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2=(-2)^{-8}=\frac{1}{(-2)^8}=\frac{1}{256}$$

$$\frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}}=(-3)^{-3-(-4)}=(-3)^{-3+4}=(-3)^1=-3,\qquad 4)\ 5^2 5^3=5^{2+3}=5^5=3125$$

$$5)(-3)^2(-3)^3=(-3)^5=-243,\qquad 6)\left(\frac{2}{9}\right)^0=1,$$

$$7)-5^{-2}=\frac{-1}{5^2}=\frac{-1}{25}=-0.04,\qquad 8)\left(\frac{2}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{9}{2}\right)^3=\frac{9^3}{2^3}=\frac{729}{8}=91.125$$

$$9)\frac{-2^4}{2^5}=-2^{4-5}=-2^{-1}=\frac{-1}{2}=-0{,}5,\qquad 10)(-3t)^{-2}=\frac{1}{(-3t)^2}=\frac{1}{(-3)^2t^2}=\frac{1}{9t^2}$$

$$11)\ 5(0.1)^{15}(10^{-2}\times 100^4)^3=5(10^{-1})^{15}\{10^{-2}(10^2)^4\}^3=5(10^{-15})(10^{-2}10^8)^3$$
$$=5\times 10^{-15}\times 10^{-6}\times 10^{24}=5\times 10^{-15-6+24}=5\times 10^3=5000$$

$$12)\frac{15(.001)^{-2}\times 1000^2}{3(0.01)^{-5}\times 10^9}=\frac{15(10^{-3})^{-2}(10^3)^2}{3(10^{-2})^{-5}10^9}=\frac{15\times 10^6\times 10^6}{3\times 10^{10}\times 10^9}$$
$$=5\times 10^{6+6-10-9}=5\times 10^{-7}=\frac{5}{10^7}$$

تمارين(١- ٣)

تمرين ١: احسب ما يلي:

$1)\frac{3}{13}+\frac{5}{13},\quad 2)\frac{2}{11}-\frac{5}{11}+\frac{3}{11},\quad 3)\frac{3}{11}-\frac{2}{3},\quad 4)\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{9}}$

$5)\frac{5}{7}\div\frac{1}{2}+\frac{7}{11},\quad 6)\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}+\frac{-2}{7},\quad 7)\frac{5}{9}\div\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{15}\right),\quad 8)\left(\frac{2}{17}+\frac{1}{34}\right)\times\frac{2}{5}$

$9)\ 3\times\frac{25}{172},\quad 10)7+\frac{2}{5},\quad 11)\ 35\div\frac{7}{9},\quad 12)-3\times\frac{7}{13}+\frac{1}{13}$

تمرين ٢: أجرِ العمليات الحسابية التالية مقرباً الأجوبة الى رقمين عشريين:

$1)17.87+25.04-23,\quad 2)111.325-122.53+13.27,\quad 3)34.52-(-18),$

$4)1762.125-(17.53-19.25),\quad 5)75.17+(15.32-23),\quad 6)\frac{145+19-147}{3-9+7}$

$7)27\div18\times3\times3.1,\quad 8)114.3\times3.2\div5.2,\quad 9)13\times7.2\div5\div3,$

$10)2,9\times30\div5,\quad 11)1.781\div(2,9\times0.1),\quad 12)\frac{9.2-13(5.4+7.3)}{217.9+6\times2.3}$

تمرين ٣: بسِّط ما يلي إلى أبسط صورة مستخدماً قوانين الأسس:

$1)\frac{8^{-3}\times(18)^2}{81\times(16)^{-2}},\quad 2)\frac{x^3y^5z^{-4}}{y^3x^{-2}z^2},\quad 3)\frac{4^{n+1}\times6^{1-2n}}{9^{1-n}},\quad 4)\ 5x^{-3}(6^{-1}x^{-4})^3,$

$5)\frac{15x^{-2}y^2}{3x^{-5}y},\quad 6)(-9Z^2t^3)^{-2}\quad 7)\ 2(0.01)^{-2}(3^{-1}10^5)^4,\quad 8)\frac{105(0.01)^{-3}\times100^2}{300(0.001)^{-4}\times10^8}$

$9)\frac{75\times35\times15}{5^2\times21\times9},\quad 10)\frac{(125)^{2n}\times(16)^n}{(10)^{4n}\times(25)^{n+1}},\quad 11)\frac{9^n\times6^{n+1}}{2^{n+3}\times(27)^n},\quad 12)(\frac{2x}{y})^3(\frac{3x^2}{4y^3})(\frac{y^4}{x^3})^2$

الوحدة الثانية

كثيرات الحدود

الهدف العام :

معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية واختصارها .

الأهداف التفصيلية :

بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب من :

١. إجراء العمليات الحسابية على كثيرات الحدود.

٢. تحليل كثيرات الحدود.

٣. حساب الكسور الجبرية واختصارها.

كثيرات الحدود

١. تعريف كثيرات الحدود :

تعريف ١: يكون الحدُّ الجبري إما ثابتاً أو متغيراً، أو حاصل ضرب ثابت في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عدداً صحيحاً غير سالب. يُسمَّى الثابت معامل الحد الجبري، وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال ١: معامل الحد الجبري $-3x^2y$ هو -3 ودرجته تساوي $3 = 2+1$

تعريف ٢: الحدود المتشابهة هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس)
فمثلاً $12x^2$ و $-9x^2$ حدان متشابهان ولكن الحدود $-2x^3y$ و $7x^3y^2$ ليست متشابهة.
ملحوظة: درجة الحد الثابت دائماً تساوي الصفر $(2 = 2x^0)$.

تعريف ٣: كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منتهٍ من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حدٍّ فيها.

الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x هو كالتالي:
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ حيث $a_n \neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب.
المعامل a_n هو المعامل الرئيسي و a_0 هو الحد الثابت.

مثال ٢: الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود الثلاثة:

كثيرة الحدود	الحدود	الدرجة	المعاملات	المعامل الرئيسي
$9x^2 - x + 5$	$9x^2, -x, 5$	2	$9, -1, 5$	9
$11 - 2x$	$-2x, 11$	1	$-2, 11$	-2
$x^3 + 5x - 3$	$x^3, 5x, -3$	3	$1, 5, -3$	1

٢. العمليات الحسابية على كثيرات الحدود .

٢. ١. جمع وطرح كثيرات الحدود :

نقوم بجمع أو طرح الحدود المتشابهة فقط كما هو موضح في المثال التالي:

مثال٣: اختصر ما يلي:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3),\quad 2)\,(x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2).$$

الحل:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)=(3x^2+4x^2)+(6x-5x)+((-4)+3)$$
$$=7x^2+x-1$$
$$2)\,(x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)=[x^2-2x^2]+[(-5x)-(+3x)]+[7-(-2)]$$
$$=-x^2-8x+9.$$

٢. ٢. ضرب كثيرات الحدود :

تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني وهكذا.

مثال٤: احسب واختصر ما يلي: $(2x-3)(3x^2-x+1)$

الحل:

$$(2x-3)(3x^2-x+1)=(2x)(3x^2)+(2x)(-x)+(2x)(1)+(-3)(3x^2)+(-3)(-x)+(-3)(1)$$
$$=6x^3-2x^2+2x-9x^2+3x-3=6x^3-11x^2+5x-3$$

بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب:

$$1)\,(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$
$$2)\,(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+2xy+y^2$$
$$3)\,(x-y)^2=(x-y)(x-y)=x^2-2xy+y^2$$
$$4)\,(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$5)\,(x-y)^3=(x-y)(x-y)(x-y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

مثال٥: أوجد حاصل الضرب التالي باستخدام القوانين المشهورة:

$$1)\,(7x+10)(7x-10),\qquad 2)\,(2y^2+11z^2)^2,\qquad 3)\,(2x-3y)^3.$$

الحل:

1) $(7x+10)(7x-10)=(7x)^2-(10)^2=49x^2-100$

2) $(2y^2+11z^2)^2=(2y^2)^2+2(2y^2)(11z^2)+(11z^2)^2=4y^4+44y^2z^2+121z^4$

3) $(2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

٢ . ٣. حساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير :

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة كما هو موضح في المثال التالي:

مثال ٦: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند قيم المتغير x المعطاة:

1) $2x+1\ ; x=3$

2) $6x^2-7; x=-2$

3) $2x^3-6x^2+7; x=\sqrt{2}$

الحل:

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بالقيم المعطاة كالتالي:

1) $2x+1\big|_{x=3}=2\times3+1=6+1=7$

2) $6x^2-7\big|_{x=-2}=6\times(-2)^2-7=6\times4-7=24-7=17$

3) $2x^3-6x^2+7\big|_{x=\sqrt{2}}=2(\sqrt{2})^3-6(\sqrt{2})^2+7=2(2\sqrt{2})-6(2)+7=4\sqrt{2}-12+7=4\sqrt{2}-5$

٢ . ٤. قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة) :

تعريف٤: قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المستعملة في تقسيم الأعداد الصحيحة.

مثال ٧: لتقسيم $x^2+9x-16$ على $x-3$ نتبع الطريقة التالية:

	$x+12$
$x-3$	$x^2+9x-16$
-	x^2-3x
	$12x-16$
-	$12x-36$
	20

في هذا المثال يكون حاصل قسمة $x^2+9x-16$ على $x-3$ هو $x+12$

وباقي القسمة هو 20

وبالتالي يكون لدينا :

$$x^2+9x-16\div(x-3)=x+12+\frac{20}{x-3}$$

تمارين (٢- ١)

تمرين ١: اذكر الحدود والمعاملات والدرجة والمعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود التالية:

$1) x^2+2x-7,\qquad 2)\ \sqrt{2},\qquad 3)\ 4x^2y^2-5x^3y^2+17xy^3,$

$4) 2x^4+3x^3+4x^2+5,\quad 5)\ x^3-1,\quad 6)\ -9x^5y+10xy^4-11x^2y^2.$

تمرين ٢: احسب واختصر ما يلي:

$1)(3x^2+4x+5)+(2x^2+7x-2),$

$2)(4w^2-2w+7)+(5w^3+8w^2-1),$

$3)(7s^2-4s+11)-(-2s^2+11s-9),$

$4)(u^3-3u^2-4u+8)-(u^2-2u+4),$

$5)(5x-7)(3x^2-8x-5),$

$6)(3x^2-2x+5)(2x^2-5x+2),$

$7)(3c-2)(4c+1)(5c-2),$

$8)(4u-5)(2u-1)(3u-4).$

تمرين ٣: استخدم القوانين المشهورة لحساب واختصار ما يلي:

$1)(3x+5)(3x-5),$

$2)(4x^2-3y)(4x^2+3y),$

$3)(3x^2-y)^2,$

$4)(4w+z)^2,$

$5)[(x-2)+y]^2,$

$6)[(x+3)-y]^2,$

$7)[(x+5)+y][(x+5)-y],$

$8)[(x-2y)+7][(x-2y)-7],$

$9)(x-1)^3,$

$10)(2x+y)^3,$

$11)[(x-1)+2y]^3,$

$12)[4-(1-2y)]^3.$

تمرين ٤: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند قيم المتغير x المعطاة:

$1) x^2+7x-1\ ;\ x=3$

$2) -x^2-5x+4\ ;\ x=-5$

$3)\ 5x^3-x^2+5x-3\ ;\ x=-1$

$4) 1-x^3-x^5\ ;\ x=2$

تمرين ٥: استعمل طريقة القسمة المطولة لقسمة كثيرة الحدود الأولى على الثانية:

$1)\ 20x^3+2x^2+3x+20,\ x+3$

$2)\ 6x^4+3x^3-11x^2-2x-9,\ 2x-3$

$3)\ 2x^4-x^3-23x^2+9x+45,\ 2x^2-x-5$

$4)\ 24x^5+20x^3-18x^2-15,\ 6x^2+5$

٣. تحليل كثيرات الحدود .

تعريف ٥: عملية كتابة كثيرة حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليلاً ، وعملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات وسنتطرق في هذا البابإلى كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة فقط.

٣. ١. طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م) :

في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكنا كما هو موضح في المثال التالي.

مثال ٨: حل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر:

$1)10x^3+6x,\quad 2)12x^2y-6xy-30xy^2,\quad 3)(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b).$

الحل:

1) نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م) بين $10x^3$ و $6x$ هو $2x$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$10x^3+6x=2x(5x^2)+2x(3)=2x(5x^2+3)$$

2) في هذه الفقرة نلاحظ أن (أ.ع.م) بين الحدود الثلاثة هو $6xy$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$\begin{aligned}12x^2y-6xy-30xy^2&=6xy(2x)-6xy(1)-6xy(5y)\\&=6xy(2x-1-5y)=6xy(2x-5y-1)\end{aligned}$$

3) هنا نلاحظ أن (أ.ع.م) هو كثير الحدود $2a-b$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$\begin{aligned}(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)&=(2a-b)\big[(x-4)+(x+4)\big]\\&=(2a-b)(x-4+x+4)=(2a-b)(2x)=2x(2a-b)\end{aligned}$$

هناك حالات يتم فيها التحليل بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي :

مثال ٩: حل كثيرة الحدود التالية : $6y^3-21y^2-4y+14$

الحل:

نقوم أولاً بتجميع الحدين الأولين وتجميع الحدين الأخيرين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)$$

ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$

وفي الأخير نلاحظ أن $2y-7$ أصبح عاملاً مشتركاً بين المجموعتين، فإذن يصبح التحليل كما يلي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$
$$=(2y-7)(3y^2-2)$$

٣. ٢. طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c

الحالة الأولى: $a=1$

في هذه الحالة نبحث عن عددين صحيحين m,n تحقق الشرطين التاليين:

$$1)\ mn=c\ \ ,\ \ 2)\ m+n=b$$

أي أن حاصل ضربهما يساوي المعامل الثابت c وجمعهما الجبري يساوي b.

وعندئذ يكون التحليل كما يلي:

$$x^2+bx+c=(x+m)(x+n)$$

مع الملاحظة أن إشارة m و n تكون نفس إشارة b إذا كان $c>0$ ومختلفتان إذا كان $c<0$.

مثال١٠: حلل كثيرة الحدود التالية : $x^2+7x-18$

الحل:

في هذه الحالة $b=7$ و $c=-18$ إذن يجب البحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -18 وجمعهما الجبري يساوي 7 فالعددين حسب الشرطين المذكورين هما -2 و 9 لأن: $7=9+(-2)$ و $-18=9\times(-2)$.. وهكذا يصبح التحليل كما يلي:

$$x^2+7x-18=(x-2)(x+9)$$

ويمكن التأكد من هذا الحل بفك الأقواس.

الحالة الثانية: $a\neq 1$

في هذه الحالة نبحث عن أربعة أعداد صحيحة m,n,p,q تحقق الشروط الثلاثة التالية:

$$1)\ mn=a\ \ ,\ \ 2)\ pq=c\ \ ,\ \ 3)\ mq+np=b$$

وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل كما يلي: $ax^2+bx+c=(mx+p)(nx+q)$

يتم اختيار m وn على أساس الشرط (1) و يتم اختيار p و q على أساس الشرط (2) ثم نستخدم الشرط (3) للتأكد من صحة الأعداد m, n, p, q.

مثال ١١: حلل كثيرة الحدود التالية : $6x^2 + 11x + 3$

الحل:

يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m, n, p, q حيث:

$$mn = a = 6, pq = c = 3, mq + np = b = 11$$

بطريقة التجربة والخطأ نجد في الأخير أن: $m = 2, n = 3, p = 3, q = 1$ إذن يكون التحليل كما يلي:

$$6x^2 + 11x + 3 = (2x + 3)(3x + 1)$$

ملحوظة:

١) حتى يكون $ax^2 + bx + c$ قابلاً للتحليل بمعاملات صحيحة يجب أن تكون القيمة $b^2 - 4ac$ مربعاً كاملاً .

فمثلاً $6x^2 - 5x - 4$ قابل للتحليلبمعاملات صحيحة لأن :

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6)(-4) = 121 = 11^2$$

$$6x^2 - 5x - 4 = (3x - 4)(2x + 1)$$

٢) إذا كان $p = q$ و $m = n$ فنقول إن $ax^2 + bx + c$ هو مربع كامل وتحليله يكون كما

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)^2$$

فمثلاً $9x^2 + 12x + 4$ هو مربع كامل وتحليله يكون كما يلي:

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$$

٣.٢. طريقة تحليل فرق مربعين :

في هذه الطريقة نستخدم إحدى القوانين المشهورة التي ذكرناها في بداية هذهالوحدة وهي:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

مثال ١٢: حلل $49x^2 - 144$

الحل: يمكن كتابة $49x^2 - 144$ على شكل $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون المذكور أعلاه ويصبح التحليل كالتالي:

$$49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2 = (7x + 12)(7x - 12)$$

تمارين (٢- ٢)

تمرين ١: اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

تحليل كثيرة الحدود $x^2-9x+20$ هو a) $(x+10)(x+2)$ b) $(x+5)(x+4)$ c) $(x-5)(x-4)$ d) $(x+10)(x+10)$	1
تحليل كثيرة الحدود x^2+7x+6 هو a) $(x+3)(x+2)$ b) $(x-5)(x-2)$ c) $(x+6)(x+1)$ d) $(x-1)(x-6)$	2
تحليل كثيرة الحدود $x^2+2x-24$ هو a) $(x+4)(x+6)$ b) $(x-4)(x+6)$ c) $(x-8)(x+3)$ d) $(x+6)(x-5)$	3
تحليل كثيرة الحدود $6x^4+14x^3-12x^2$ هو a) $2x^2(3x^2+7x-6)$ b) $2(3x^2+7x-6)$ c) $(x+3)(x^2+2)$ d) $(7x+3)(2x+4)$	4
تحليل كثيرة الحدود x^2-36 هو a) $(x+36)(x-36)$ b) $(x+6)(x-6)$ c) $(x+4)(x^2-9)$ d) $(x^2+6)(x^2-6)$	5

تمرين ٢: حلل كلاً مما يلي باستخدام الطريقة المناسبة:

1) $-15x^2-12x$,
2) $6a^3b^2-12a^2b+72ab^3$,
3) $(x-4)(m+2n)+n(x-4)$,
4) $x(y-3)-5(3-y)$,
5) $3x^3+x^2+6x+2$,
6) $2x^2-2xy+x-y$,
7) $10z^3-15z^2-4z+6$,
8) $6m^3+4m^2-15m-10$,
9) $x^2+9x+20$,
10) $b^2+12b-28$,
11) $8a^2-26a+15$,
12) $6x^2-23x+20$,
13) x^4-11x^2+18,
14) $9x^4-10x^2+1$,
15) $6x^4+23x^2+15$,
16) x^2-9,
17) $81b^2-16c^2$,
18) x^4-9,
19) $16y^4-256$,
20) $1-121n^2$,
21) $x^2-(y+z)^2$,

٤. الكسور الجبرية (العبارات النسبية).

تعريف ٦: كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيرتي حدود.

مثال ١٣: تعتبر $\frac{3x+1}{2x-5}$ و $\frac{x^2-3x+4}{x^2+7x+12}$ كسور جبرية.

مجال الكسر الجبري هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي الصفر؛ لأنّ القسمة في هذه الحالة تكون غير معرّفة.

مثال ١٤: مجال تعريف $\frac{2x}{x^2-3x}$ هو كل الأعداد الحقيقية دون $x=3$ و $x=0$ لأن قيمة المقام عند هذه النقاط تساوي الصفر.

نظرية ٢: خصائص الكسور الجبرية هي كالتالي:

$$1)\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}\Leftrightarrow PS=QR, \qquad 2)\frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR} \quad , \quad R\neq 0, \qquad 3)-\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q},$$

$$4)\frac{P}{Q}\pm\frac{R}{Q}=\frac{P\pm R}{Q}, \qquad 5)\frac{P_1}{Q_1}\pm\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\times Q_2\pm P_2\times Q_1}{Q_1\times Q_2},$$

$$6)\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \quad , \qquad 7)\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}=\frac{PS}{QR} \quad , \quad R\neq 0.$$

اختصار الكسور الجبرية :

عملية اختصار الكسر الجبري هي حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام. فإذن عملية الاختصار تتطلب منّا الإدراك الجيد بعمليات التحليل التي مرت بنا في هذا الباب.

مثال ١٥: اختصر ما يلي: $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

الحل:

أولاً نقوم بتحليل البسط والمقام بالطرق التي مرت بنا سابقاً كالتالي:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3) \quad , \quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

إذن يختصر الكسر كالتالي:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+2}, \qquad x+3\neq 0\Rightarrow x\neq -3$$

ملحوظة: $\frac{x+6}{2}\neq x+3$ وإنما $\frac{x+6}{2}=\frac{x}{2}+\frac{6}{2}=\frac{x}{2}+3$

مثال ١٦: اختصر كلاً مما يلي:

$$1)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\times\frac{x-1}{x-2},\qquad 2)\ \frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\div\frac{x^2+7x+12}{x(x^2+x-12)}$$

الحل:

$$1)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\times\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}\times\frac{x-1}{x-2}$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}\ ,\ x\neq 1\ x\neq 2$$

$$2)\ \frac{x^2+6x+9}{x^2-9}\div\frac{x^2+7x+12}{x(x^2+x-12)}=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x-3)}\div\frac{(x+4)(x+3)}{x(x+4)(x-3)}$$

$$=\frac{x+3}{x-3}\div\frac{x+3}{x(x-3)}\ ,x\neq -3,x\neq -4$$

$$=\frac{x+3}{x-3}\times\frac{x(x-3)}{x+3}$$

$$=\frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=x\ ,\ \ x\neq 3,\ x\neq -3,x\neq -4$$

مثال ١٧: احسب واختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n},\qquad 2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1},\qquad 3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}.$$

الحل:

بعد تحليل المقام _إذا كان ذلك ممكناً_ يجب أن نبحث عن أصغر مقام مشترك.

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}=\frac{(2mn+m)-(mn+m)}{m+n}=\frac{2mn+m-mn-m}{m+n}=\frac{mn}{m+n}$$

$$2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}=\frac{x(2x-1)+3(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2-x+3x+3}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(2x-1)}$$

$$3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x-1}{(x-5)(x+2)}$$

$$=\frac{x(x-5)}{(x-2)(x+2)(x-5)}-\frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{x(x-5)-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}=\frac{(x^2-5x)-(2x^2-4x-x+2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{x^2-5x-2x^2+4x+x-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}=\frac{-x^2-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=-\frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

هناك حالات يكون فيها بسط ومقام الكسر الجبري عبارة عن كسور جبرية ، لاختصار مثل هذا الكسر يجب أولاً اختصار كل من البسط والمقام ثم نواصل عملية الاختصار بنفس الطريقة المذكورة سابقاً .

ملحوظة: من الخطأ اختصار $\frac{2x^2+y}{3x^2}$ و $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}$ كما يلي:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{2x^2+y}{3x^2}=\frac{2+y}{3}$$

تمارين (٢- ٣)

تمرين ١: اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

1	اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2+9x-10}{x^2-100}$ هو a) $\frac{9x}{10}$ b) $x+10$ c) $\frac{x-1}{x-10}$ d) $\frac{9x-10}{100}$
2	تبسيط الكسر $\frac{10x^3y^2}{2x^5y}$ هو a) $5x^8y^3$ b) $\frac{5y}{x^2}$ c) $5xy$ d) xy
3	اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2+2x}{x+2}$ هو a) $\frac{2x+1}{x}$ b) x c) $\frac{x}{2}$ d) $\frac{1}{x}$
4	تبسيط الكسر $\frac{15x^2y^2}{5xy^5}$ هو a) $5x^8y^3$ b) $\frac{3x}{y^3}$ c) $3xy^3$ d) xy
5	اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2-4}{x+2}$ هو a) $\frac{2x+1}{x}$ b) $x-2$ c) $\frac{x}{2}$ d) $\frac{1}{x}$

تمرين ٢: اختصر الكسور الجبرية التالية:

1) $\frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)}$, 2) $\frac{x^2-x-20}{3x-15}$ 3) $\frac{x^3-9x}{x^3+x^2-6x}$, 4) $\frac{a^4-16}{a^2-4}$,

5) $\frac{x^2+3x-40}{-x^2+3x+10}$, 6) $\frac{10x^2-3x-1}{2x^2+5x-3}$, 7) $\frac{2x^3-6x^2+5x-15}{9-x^2}$, 8) $\frac{x^3-x^2+2x}{x^4-1}$.

تمرين ٣: احسب واختصر كلاً مما يلي:

$1)\ \frac{x^2+x}{2x+3}\cdot\frac{3x^2+19x+28}{x^2+5x+4},$ $\quad 2)\ \frac{x^2-16}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2-4x-21}{x^2-4x}$

$3)\ \frac{12m^2+28m+15}{6m^2+35m+25}\cdot\frac{2m^2-m-3}{3m^2+11m-20},$ $\quad 4)\ \frac{6u^2-5u+1}{3u^2+11u-4}\div\frac{2u^2+3u-2}{u^2+3u-4}$

$5)\ \frac{z^2-81}{z^2-16}\div\frac{z^2-z-20}{z^2+5z-36},$ $\quad 6)\ \frac{2a^2-5a+3}{a^2+a-2}\div\frac{3a^2-8a-3}{a^2-a-6}$

تمرين ٤: احسب واختصر كلاً مما يلي:

$1)\ \frac{9x+1}{2x-1}-\frac{3x+4}{2x-1},$ $\quad 2)\ \frac{x+1}{2x+3}+\frac{2x-1}{2x-3},$ $\quad 3)\ \frac{x}{x^2-9}-\frac{3x-1}{x^2+7x+12}$

$4)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{3x-1}\cdot\frac{3x^2+11x-4}{x-5},$ $\quad 5)\ \frac{x+1}{x-3}-\frac{2x}{x-3}\div\frac{x+5}{x-3},$ $\quad 6)\ \left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right).$

تمرين ٥: احسب واختصر كلاً مما يلي:

$1)\ \frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x+1}+\frac{4}{4x+1},$ $\quad 2)\ \frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-16},$

$3)\ \frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{5}{x^2+3x-10},$ $\quad 4)\ \frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2x}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2-4}$

الوحدة الثالثة

المحددات والمصفوفات

الهدف العام :

معرفة المحددات والمصفوفات والقدرة على حساب المحددات وأداء العمليات على المصفوفات.

الأهداف التفصيلية :

بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب من:

١. أداء العمليات على المصفوفات.

٢. حساب المحددات.

٣. حساب مقلوب مصفوفة مربعة.

المحددات والمصفوفات

يبدو أن أول استخدام للمصفوفات كان في الكتاب الصيني "تسعة كتب في الحساب" قبيل بداية التاريخ الميلادي، بينما أول المحددات استخدمت من طرف الياباني *Seki Kōwa* سنة ١٦٨٣م.

وتُعدُّ المحددات والمصفوفات موضوعاً رئيساً في أحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر الخطي.

و من تطبيقاتها: حل المعادلات الخطية وحل المسائل باستخدام الحاسوب.

١. تعريف المصفوفات:

تعريف ١: مصفوفة أعداد حقيقية من الرتبة $m\times n$ هي قائمة أعداد حقيقية، تُسمَّى عناصرها، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة بحيث أن عدد الصفوف يساوي m وعدد الأعمدة يساوي n .

يمكن الإشارة إلى أنّ المصفوفات 1×1 هي أعداد حقيقية.

مثال ١: المصفوفات التالية من الرتبة 2×3 ، 3×2 ، 4×1 ، 1×5 ، و 3×3 على الترتيب

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 10\\ 3 & 5 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 7 & 5\\ 10 & 12\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0.5\\ 2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-0.6 & 2 & 17 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 0.7\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين:

تعريف ٢: تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما نفس الرتبة و تساوت عناصرهما (الموافقة) على الترتيب.

مثال ٢: نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق والمصفوفتين التاليتين:

$$F=\begin{pmatrix}3+2 & 2 & -1\times3\\ 1 & 0 & 0.7\\ 2 & 2-6 & 0\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 0.7\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

$A\neq B$ لأنهما من رتبتين مختلفتين، وكذلك $E\neq G$ لأنّه يوجد عنصران غير متساويين (الصف الثاني والعمود الثاني)، بينما $E=F$.

٢. العمليات على المصفوفات .

٢ . ١. الجمع والطرح:

تعريف ٣: حاصل جمع أو طرح مصفوفتين لهما نفس الرتبة هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو مجموع أو طرح العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.

مثال٣: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\\ -6 & 3 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ A+B, \qquad 2)\ B-A.$$

الحل:

$$1)\ A+B=\begin{pmatrix}2-2 & 4+0 & 7+1\\ -6+3 & 3+4 & -1+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4 & 8\\ -3 & 7 & 6\end{pmatrix}$$

$$2)\ B-A=\begin{pmatrix}-2-2 & 0-4 & 1-7\\ 3-(-6) & 4-3 & 7-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -6\\ 9 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

٢ . ٢. ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه:

تعريف ٤: ضرب أو قسمة مصفوفة في أو على عدد حقيقي هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب أو قسمة العنصر الموافق له من المصفوفة الأصلية في أو على العدد الحقيقي.

مثال٤: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}.$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ 3A, \qquad 2)\ -A+2B, \qquad 3)\ \frac{B}{-2}.$$

الحل:

$$1)\ 3A=3\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 3 & 3\times 0\\ 3\times 1 & 3\times 2\\ 3\times 6 & 3\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

$$2)\; -A+2B=-1\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\\ -6 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\\ 6 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -6\\ 0 & -4.2\end{pmatrix}$$

$$3)\; \frac{B}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{0.5}{-2} & \frac{1}{-2}\\ \frac{0}{-2} & \frac{-2}{-2}\\ \frac{3}{-2} & \frac{0.4}{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.25 & -0.5\\ 0 & 1\\ -1.5 & -0.2\end{pmatrix}$$

٢ . ٣. ضرب صف في عمود:

تعريف ٥: حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود، وهذا الضرب ليس تبديلياً.

مثال ٥: احسب ما يلي:

$$1)\; a=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 4\\ 10\end{pmatrix},\qquad 2)\; b=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\; a=(1\times(-3))+((-2)\times 1)+(0\times 4)+(0.3\times 10)=-3-2+0+3=-2$$

2) لا يمكن حساب b لأنّ عدد عناصر الصف لا يساوي عدد عناصر العمود.

تجدر الإشارة إلى أنّه يمكن حساب ضرب العمود في الصف بعد التعريف اللاحق فقط.

٢ . ٤. ضرب مصفوفتين:

تعريف ٦: حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m\times k$ في مصفوفة من الرتبة $k\times n$ (أي أنّ عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هو مصفوفة من الرتبة $m\times n$، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

مثال ٦ : إذا كان لدينا المصفوفات التالية :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 30\\ 15 & 0 & -12\\ 23 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ AB,\qquad 2)\ BA,\qquad 3)\ BC.$$

الحل:

$$1)\ AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 15 & -3\end{pmatrix}$$

$$2)\ BA=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 3\\ 8 & -3 & 6\\ -4 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

3) لا يمكن حساب الضرب؛ لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى هو 2 بينما عدد صفوف المصفوفة الثانية هو 3 غير متساويين.

ملحوظة : من نتائج الفقرتين (1) و (2) من المثال السابق يمكن استنتاج أنّ: $AB \neq BA$ أي أنّ عملية ضرب المصفوفات غير تبديلي.

نظرية ١: إذا كانت A,B,C ثلاث مصفوفات من الرتب المواتية للقيام بالعمليات التالية فسيكون لدينا:

1) $A+B=B+A,$ جمع المصفوفات تبديلي

2) $A+(B+C)=(A+B)+C,$ جمع المصفوفات تجميعي

3) $A(BC)=(AB)C,$ ضرب المصفوفات تجميعي

2) $A(B+C)=AB+AC.$ ضرب المصفوفات توزيعي بالنسبة للجمع

مثال ٧:إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&0&0.5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\\0&4\end{pmatrix}.$$

فتحقق من الفقرة ٣ من النظرية السابقة، أي أنّ ضرب المصفوفات تجميعي

$$A(BC)=(AB)C,$$

الحل:

$$AB=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&-0.5\\6&0&1\end{pmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}-3&0&-0.5\\6&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-5\\12&10\end{pmatrix}\qquad(1)$$

$$BC=\begin{pmatrix}3&0&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5\end{pmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-5\\12&10\end{pmatrix}\qquad(2).$$

من (1)و (2)نستنتج أنّ $A(BC)=(AB)C$

مثال ٨: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix}.$$

فتحقق من الفقرة ٤ من النظرية السابقة، أي أنّ ضرب المصفوفات توزيعي بالنسبة للجمع

$$A(B+C)=AB+AC.$$

الحل :

$$B+C=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5\\ -18 & 3\end{pmatrix}\qquad (1).$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -15 & 3\end{pmatrix}.$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -10\\ -3 & 0\end{pmatrix}.$$

$$AB+AC=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -15 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -10\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -5\\ -18 & 3\end{pmatrix}\qquad (2).$$

من (1) و (2) نستنتج أنّ $A(B+C)=AB+AC$

٢. ٥. منقول المصفوفة:

تعريف ٧: منقول مصفوفة A من الرتبة $m\times n$ هو المصفوفة A^t من الرتبة $n\times m$ ، بحيث إنّ صفوف الثانية هي أعمدة الأولى وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى .

مثال ٩: احسب منقول كلاً من المصفوفاتالتالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0.5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

الحل:

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix},\qquad B^t=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0.5\end{pmatrix},\qquad C^t=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

٣. بعض المصفوفات الخاصة :

٣ . ١. المصفوفة المربعة:

تعريف ٨: تكون المصفوفة A مربعةً إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

مثال ١٠: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

فالمصفوفات B و A مصفوفات مربعة 2×2 والمصفوفات D و C مصفوفات مربعة 3×3 بينما المصفوفة E ليست مصفوفة مربعة .

٣ . ٢. مصفوفة الوحدة:

تعريف ٩: مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة ، بحيث إنّ كل عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 وكل العناصر الأخرى تساوي الصفر، ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الرتبة $n\times n$ ، أو بالرمز I إذا لم يكن هناك التباس في رتبتها.

مثال ١١:

$$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad I_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

نظرية ٢: مصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات.

مثال ١٢: إذا كان لدينا المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & 4\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

فاحسب كلاً مما يلي: $1)\ AI,\qquad 2)\ IA$

الحل:

$$1)\ AI=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix},$$

$$2)\ IA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}.$$

ومنه نستنتج أنّ. $AI=IA=A$ أي أنّمصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات

٣. ٣. المصفوفة الصفرية .

تعريف ١٠: المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفار ونرمز لها بالرمز O.

مثال ١٣: المصفوفات التالية هي مصفوفات صفرية :

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

نظرية ٣: المصفوفة الصفرية عنصر حيادي في جمع المصفوفات.

مثال ١٤: إذا كان لدينا المصفوفة التالية: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}$

فاحسب كلاً مما يلي: $1)\ A+O,\qquad 2)\ O+A$

الحل:

$$1)\ A+O=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix},$$

$$2)\ O+A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&4\\1&5&2\end{pmatrix}.$$

ومنه. $A+O=O+A=A$ أي أنّالمصفوفة الصفرية عنصر حيادي في جمع المصفوفات.

٤. المحددات

٤. ١. تعريف المحددات:

تعريف ١١: المحدد من الرتبة $n\times n$ هو عدد حقيقي نتحصل عليه من المصفوفة المربعة وذلك باستخدامقواعد حسابية معينة. ونرمز له بالرمز $\det(A)$.

يمكن الإشارة إلى أنّ قيمة المحددات 1×1 تساوي عنصرها.

٤. ٢. حساب المحددات 2×2:

تعريف ١٢: المحدد 2×2 للمصفوفة $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيس (الصاعد)، أي أنّ:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال ١٥: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},\qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(2\times 3)-(4\times 1)=6-4=2,$$

$$2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=(1\times 0)-(5\times -1)=0-(-5)=5$$

٤. ٣. حساب المحددات 3×3:

تعريف ١٣: المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هو مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة (النازلة) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية الثلاثة (الصاعدة)، و نتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على الترتيب.

إذا كانت المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ فإنّ:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12})$$

مثال ١٦: احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9\\ 2 & 6 & 3\\ 8 & 7 & 4\end{vmatrix},\qquad 2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 4\end{vmatrix}.$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9\\ 2 & 6 & 3\\ 8 & 7 & 4\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} 1 & 3 & 9\\ 2 & 6 & 3\\ 8 & 7 & 4\end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3\\ 2 & 6\\ 8 & 7\end{matrix}$$

$$=[(1\times6\times4)+(3\times3\times8)+(9\times2\times7)]-[(8\times6\times9)+(7\times3\times1)+(4\times2\times3)]$$

$$=[24+72+126]-[432+21+24]=222-477=-255$$

$$2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 4\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} -1 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 4\end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 0\\ 5 & 1\\ 0 & -2\end{matrix}$$

$$=[(-1\times1\times4)+(0\times-3\times0)+(2\times5\times-2)]-[(0\times1\times2)+(-2\times-3\times-1)+(4\times5\times0)]$$

$$=[-4+0-20]-[0+(-6)+0]=-24-(-6)=-24+6=-18$$

مثال ١٧: احسب محددات المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

الحل:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-(-1)=1,\qquad \det(B)=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2-3=-5$$

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 1 & 4 & -2\\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0\end{array}\right.$$
$$=[-2+0+0]-[(-12)+0+0]=-2-(-12)=-2+12=10$$

$$\det(D)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc}0 & 1 & 4 & 0 & 1\\ -5 & 3 & 0 & -5 & 3\\ 6 & 1 & -3 & 6 & 1\end{array}\right.$$
$$=[0+0-20]-[72+0+15]=-20-87=-107$$

بينما لا يمكن حساب $\det(E)$ لأنّ E ليست مصفوفة مربعة.

نظرية ٤: محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما.

مثال ١٨: باعتبار المصفوفات المعطاة في المثال السابق احسب المحددات التالية:

1) $\det(AB)$, 2) $\det(BA)$, 3) $\det(CD)$,
4) $\det(DC)$, 5) $\det(A^2)$, 6) $\det(B^3)$

الحل:

لا نحتاج إلى حساب ضرب المصفوفات لأن المطلوب هو حساب المحددات فقط.

نستخدم نتائج المثال السابق:

1) $\det(AB)=\det(A)\times\det(B)=1\times-5=-5$

2) $\det(BA)=\det(B)\times\det(A)=-5\times1=-5$

3) $\det(CD)=\det(C)\times\det(D)=10\times(-107)=-1070$

4) $\det(DC)=\det(D)\times\det(C)=-107\times10=-1070$

5) $\det(A^2)=\det(A)\times\det(A)=[\det(A)]^2=1^2=1$

6) $\det(B^3)=\det(B)\times\det(B)\times\det(B)=[\det(B)]^3=(-5)^3=-125$

5. مقلوب المصفوفة :

تعريف ١٤: مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1} –إن وجدت– بحيث إنحاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أنّ:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذا المستوى إلى مقلوب مصفوفة 2×2 فقط .

نظرية ٧: إذا كان محدد مصفوفة مربعة A لا يساوي صفراً فإنها تقبل مقلوباً وحيداً

مقلوب مصفوفة 2×2 :

نظرية ٨: لتكن المصفوفة المربعة $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بحيث a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية و $\det A = ad - bc \neq 0$ لا يساوي الصفر فإنّ للمصفوفة A مقلوب وحيد يعطى بالقانون التالي:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}$$

أي أنّ هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة 2×2 عندما يكون محددها لا يساوي الصفر.

مثال ١٩: احسب مقلوب المصفوفات 2×2 التالية:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\ \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-2) = 2 \neq 0$$

محدد المصفوفة A لا يساوي الصفر، إذن فإنلها مقلوب وحيد يعطى بالقانون التالي:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1\times 4)-(2\times 3) = 4-6 = -2 \neq 0$$

محدد المصفوفة B لا يساوي الصفر، إذن فإنّ لها مقلوب وحيد يعطى بالقانون التالي:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{\det(B)}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$$

$$3)\ \det(C)=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(2\times 3)-(1\times 6)=6-6=0$$

محدد المصفوفة C يساوي الصفر إذن لا يوجد مقلوب.

تمارين (٣- ١)

تمرين ١: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 5 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 5 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -3 & -2 & -4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 6 & -1 & -1\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي إن أمكن :

$$1)-2A+3D,\quad 2)C+B^t,\quad 3)3A^t-2D^t\ ,\ 4)3(A^t+D),\ 5)2(C^t+I-3B)$$

تمرين ٢: احسب حاصل ضرب المصفوفات التالية:

$$1)\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix},\qquad 2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix},$$

$$3)\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -1\\ 3 & 7\end{pmatrix},\qquad 4)\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

تمرين ٣: احسب كلاً من المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix},\quad 2)\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix},\quad 3)\begin{vmatrix}0 & 7\\ 3 & 6\end{vmatrix},$$

$$4)\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix},\quad 5)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 5\end{vmatrix},\quad 6)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

تمرين ٤: إذا كان لدينا المصفوفة التالية:

$$M=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ \det(M). \qquad 2)\ \det(M^2). \qquad 3)\ \det(M^3).$$

تمرين ٥: احسب مقلوب كل مصفوفة مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ B=\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

تمرين ٦: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

فأوجد المصفوفات P و Q و R بحيث:

$$1)\ P=2A+B^2, \qquad 2)\ AQ+BQ=I, \qquad 3)\ RA=C.$$

تمرين ٧: احسب المصفوفة التالية:

$$B=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}A$$

تمرين ٨: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

فاحسب ما يلي إن أمكن :

$$1)\ AB^t,\ 2)\ BA^{-1}\ ,\ 3)\ B-C^t,\ \ 4)\ A^{-1}B^t+C$$

الوحدة الرابعة

المعادلات

الهدف العام :

معرفة المعادلات والقدرة على حلها.

الأهداف التفصيلية :

بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب من :

١. حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية .
٢. حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد .
٣. حل المعادلات الخطية ذات مجهولين .
٤. حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.

الفصل الأول: المعادلات

درس المصريون والبابليون المعادلات منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي. ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمّد الخوارزمي في كتابه "الجبر والمقابلة" في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة ٨٢٥م)، وهو المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر، وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية.

وتكمن أهمية المعادلات في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات.

١. تعريف المعادلات :

تعريف ١: المعادلة هي التساوي بين عبارتين (ككثيرتي حدود)، وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثال ١: المعادلة $2x+1=7$ تكون صحيحة عندما $x=3$ وخاطئة لأي قيمة أخرى لـ x. إذن نقول إن $x=3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3 تصبح المعادلة $2(3)+1=7$ وهذا صحيح.

إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تحقق صحة المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

مثال ٢: $x=3$ و $x=2$ هي حلول للمعادلة $x^2-5x+6=0$

المعادلات المتكافئة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول وتتم عملية حل معادلة في متغير x بإيجاد سلسلة من المعادلات المتكافئة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل:

$$x = \text{ثابت}$$

لإيجاد هذه المعادلات المتكافئة عادة ما نتبع الطرق التالية:

- اختصار العبارات في طرفي المعادلة إما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل التبديلية، التجميعية، والتوزيعية: $2x+3+5x=-11$ و $7x+3=-11$ معادلتان متكافئتان.
- طرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة: $3x-7=2$ و $3x=9$ معادلتان متكافئتان.
- ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط أن لا يكون هذا العدد يساوي صفراً:

$\frac{5}{6}x=10$ و $x=12$ معادلتان متكافئتان

٢. حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد:

تعريف٢ : معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هي معادلة خطية ذات مجهول واحد_سنتطرق إليها أكثر تفصيلاً في الفصل الثاني_ هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$ax+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$

مثال٣: حل المعادلات التالية:

$$1)\,2x+5=9,\qquad 2)\,\frac{3}{4}x-6=0,\qquad 3)\,(x+2)(5x+1)=5x(x+1).$$

الحل:

1) يتم حل هذه المعادلة بطرح 5 من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على 2 :

$$2x+5-5=9-5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$$

2) هنا نضيف 6 إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ لنتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}x-6=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x-6+6=0+6 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{4}{3}\right)(6) \Leftrightarrow x=8$$

3) نقوم أولاً بفك الأقواس ثم نطرح على التوالي $5x^2$, $5x$, 2 من طرفي المعادلة وفي الأخير نقسم على 6 :

$$(x+2)(5x+1)=5x(x+1) \Leftrightarrow 5x^2+11x+2=5x^2+5x \Leftrightarrow 11x+2=5x$$

$$\Leftrightarrow 6x+2=0 \Leftrightarrow 6x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

ملحوظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر قبل أن نتخلص من المقام، وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها في بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أنّالمعادلة ليس لها حل.

مثال٤: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \frac{x}{x-3}=\frac{24-5x}{x-3}, \qquad 2)\ 1+\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}.$$

الحل:

1) أولاً يجب أن يكون $x \neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفراً، ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x-3)$ لنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقاً .

$$(x-3)\frac{x}{x-3}=(x-3)\frac{24-5x}{x-3} \Leftrightarrow x=24-5x \Leftrightarrow x+5x=24-5x+5x$$

$$\Leftrightarrow 6x=24 \Leftrightarrow \frac{6x}{6}=\frac{24}{6} \Leftrightarrow x=4$$

وهذا يعتبر حلاً مقبولاً لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

2) هنا كذلك يجب أن يكون $x \neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفراً.

لنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x-5)$ ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقاً.

$$(x-5)\left(1+\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right) \Leftrightarrow (x-5)1+(x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x-5+x=5 \Leftrightarrow 2x-5=5 \Leftrightarrow 2x-5+5=5+5 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفراً فإذن الحل $x=5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول إن المعادلة الأصلية ليس لها حل .

تمارين (٤- ١)

حل المعادلات التالية وتأكد من الحل:

1) $2x+10=40,$

2) $-3y+20=2,$

3) $4x-11=7x+22,$

4) $4(2x-17)+5(3x-8)=0,$

5) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3},$

6) $\frac{1}{2}x+7-\frac{1}{4}x=\frac{19}{2},$

7) $5(x+3)(x-3)=5x(x-1),$

8) $\frac{40+30x}{5x}=\frac{6x+7}{8},$

9) $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{2x-7},$

10) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+2},$

11) $\frac{x+3}{x+5}=\frac{x-3}{x-4},$

12) $2+\frac{9}{m-3}=\frac{3m}{m-3},$

13) $\frac{4x-3}{2x}=\frac{2x-4}{x-2},$

14) $\frac{12+x}{-4}=\frac{5x-7}{3}+2,$

15) $\frac{3x}{x+4}=2-\frac{12}{x+4},$

16) $\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x-3},$

17) $5[x-(4x-5)]=3-2x,$

18) $6[3y-2(y-1)]-2+7y=0,$

19) $2+(y+1)^2=(y+2)^2,$

20) $(y+3)^2=(y+4)^2+1,$

21) $(z-7)^2=(z-2)^2+9.$

٣. حل المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف ٣: معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي التالي:

$$ax^2+bx+c=0\ , \qquad a\neq 0$$

هناك عدة طرق يمكن استخدامها لحل معادلة من الدرجة الثانية وسنتطرق إلى بعض منها في هذا الباب.

٣. ١. طريقة التحليل .

إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c باستخدام أعداد صحيحة فيمكن حينئذ تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي:

$$AB=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ \text{أو} \\ B=0 \end{cases}$$

مثال ٥: حل المعادلات التالية: $1)x^2+8x+15=0, \qquad 2)2x^2+x-6=0.$

الحل:

1) باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأيناها في الوحدة الثانية نجد أنّ

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$$

وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \text{أو} \\ x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \text{أو} \\ x=-5 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $x^2+8x+15=0$ هي $x=-3$ و $x=-5$ وجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة الثانية ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

2) يتم التحليل هنا بالبحث عن قيم للأعداد m,n,p,q لأن $a\neq 1$ ويكون الحل كالتالي:

$$2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ \text{أو} \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ \text{أو} \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ \text{أو} \\ x=-2 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $2x^2+x-6=0$ هي $x=-2$ و $x=\dfrac{3}{2}$

٣. ٢. طريقة الجذر التربيعي :

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث: $A^2 = B$ و $B > 0$ إذن $A = \pm\sqrt{B}$

مثال ٦: حل المعادلات التالية: $1) x^2 - 5 = 0, \quad 2) (x+1)^2 = 49,$

الحل:

1) بعد إضافة 5 إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2 - 5 + 5 = 0 + 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

إذن الحلول هي: $x = \sqrt{5}$ و $x = -\sqrt{5}$

2) هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$$(x+1)^2 = 49 \Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{49} \Leftrightarrow x+1 = \pm 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 7 \\ \text{أو} \\ x+1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7-1 = 6 \\ \text{أو} \\ x = -7-1 = -8 \end{cases}$$

إذن الحلول هي: $x = 6$ و $x = -8$

٣. ٣. طريقة القانون العام (طريقة المميز):

تتلخص طريقة القانون العام في حساب $\Delta = b^2 - 4ac$ ونسمي هذه القيمة بالمميز و تكون:

حلول المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ هي $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ولأن قيمة المميز $\Delta = b^2 - 4ac$ موجودة تحت الجذر فهناك ثلاث حالات هي كالتالي:

١) إذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4ac$ موجبة فهناك حلان حقيقيان مختلفان:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

٢) إذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4ac$ تساوي الصفر فهناك حلان حقيقيان متشابهان:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

٣) إذا كانت القيمة $\Delta = b^2 - 4ac$ سالبة فليست هناك حلول حقيقية.

مثال ٧: حل المعادلات التالية:

$$1)\,2x^2-5x+2=0,\qquad 2)\,x^2+6x+9=0,\qquad 3)\,3x^2+6x+7=0.$$

الحل:

1) في هذه الحالة $a=2,\ b=-5,\ c=2$ إذن:

$$b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9>0$$

إذنهناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5\pm3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{5+3}{4}=\dfrac{8}{4}=2\end{cases}$$

2) في هذه الحالة $a=1\,,\ b=6\,,\ c=9$ إذن:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(1)(9)=36-36=0$$

إذنهناك حلان حقيقيان متشابهان وهما: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(6)}{2(1)}=-3$

3) في هذه الحالة $a=3,\ b=6,\ c=7$ إذن:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(3)(7)=36-84=-48<0$$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين (٤- ٢)

تمرين ١: اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

١	حل المعادلة $x^2-5x+6=0$ هو a) $x=2$, $x=3$ b) $x=-2$, $x=0$ c) لا يوجد حلول حقيقية d) $x=-2$
٢	حل المعادلة $2x^2-4x+3=0$ هو a) $x=-2$, $x=2$ b) $x=-4$, $x=3$ c) لا يوجد حلول حقيقية d) $x=1$, $x=1$
٣	حل المعادلة $x^2-4=0$ هو a) $x=2$, $x=-2$ b) $x=-2$, $x=8$ c) لا يوجد حلول حقيقية d) $x=4$, $x=-4$
٤	حل المعادلة $x^2+3x=0$ هو a) $x=-5$, $x=3$ b) $x=0$, $x=-3$ c) لا يوجد حلول حقيقية d) $x=5$, $x=1$
٥	حل المعادلة $3x-3=2x^2+6$ هو a) $x=-2$, $x=0$ b) $x=-2$ c) لا يوجد حلول حقيقية d) $x=2$, $x=3$
٦	حل المعادلة $\dfrac{5x^2-6x}{2}=3x-10$ هو a) $x=-2$, $x=6$ b) $x=-3$ c) لا يوجد حلول حقيقية d) $x=5$, $x=10$

تمرين ٢: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل :

1) $x^2-2x-15=0,$ 2) $8y^2+189y-72=0,$ 3) $3x^2-7x=0,$

4) $8+14t-15t^2=0,$ 5) $(x-5)^2-9=0,$ 6) $(2x-5)^2-(4x-11)^2=0.$

تمرين ٣: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي :

1) $x^2=81,$ 2) $2x^2-72=0,$ 3) $(x-5)^2=36,$

4) $(x-8)^2=(x+1)^2,$ 5) $x^2=(x+1)^2,$ 6) $4x^2=(2x+3)^2.$

تمرين ٤: حل المعادلات التالية بطريقة المميز:

1) $x^2-2x-15=0,$ 2) $x^2+x-1=0,$ 3) $2x^2+4x+1=0,$

4) $3x^2-5x+3=0,$ 5) $x^2+3x-1=0,$ 6) $2x^2-5x+3=0,$

7) $-x^2=7x-1,$ 8) $2x^2+3x+5=0,$ 9) $2x^2+5x-3=0.$

الفصل الثاني :المعادلات الخطية

١. تعريف المعادلات الخطية :

تعريف١: تعبير خطي لمتغيرات ما ، هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

مثال١: هذه تعبيرات خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها:

$$1)\ -x+2.5y+3x, \qquad 2)\ y+\sqrt{3}\,x-2y+z, \qquad 3)\ 2x-y+3z$$

وهذهتعبيراتغير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها:

$$1)\ x+xy-z, \qquad 2)\ x^2+x+1, \qquad 3)\ \sqrt{x}+y+z$$

تعريف٢: معادلة خطية لمجاهيل معينة ،هي معادلة تحتوي علىتعبيراتخطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

مثال٢: هذه معادلات خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها:

$$1)\ -x+2.5y+3x-6=z-2y+3, \qquad 2)\ 2x-y+3z=-2, \qquad 3)\ x+3.5y=6$$

وهذه معادلات غير خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها:

$$1)\ x+xy-z=0, \qquad 2)\ x^2+x+1=3, \qquad 3)\ \sqrt{x}+y+z=-y+z+10$$

تعريف٣: جملة معادلات خطية (أو نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت.

لا يحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

مثال٣: هذه جملة 4 معادلات خطية للمجاهيل x و y و z :

$$\begin{cases} 1)\ -x+3y+2z=2 \\ 2)\ 3x-6y+z=-3 \\ 3)\ 2x+y-5z=10 \\ 4)\ x \qquad +3z=0 \end{cases}$$

تعريف٤: حل جملة معادلات خطية هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل بحيث تتحقق كل المعادلات المعتبرة. وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى: جملة المعادلات الخطية تقبل حلاً وحيداً ، وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثانية: جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل، وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثالثة: جملة المعادلات الخطية لها عدد لانهائي من الحلول، وذلك عندما يوجد عدد لانهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة (أي عندما لا تكون الحالتين الأوليين).

٢. المعادلات الخطية ذات مجهول واحد:

قد مرت علينا هذه المعادلات في الفصل الأول ولكن في حالة خاصة وسندرس هنا حالتها العامة.

مثال٤: حل كل من المعادلات الخطية التالية:

$1)\ -x+3=2x-6 \qquad 2)\ 3.5x+4=7x-3-3.5x \qquad 3)\ 2(3-x)=-2x+6$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نضع المجهول في طرف والثوابت في طرف آخر:

$$-x-2x=-6-3$$

الخطوة الثانية: نبسّط الطرفين:

$$-3x=-9$$

الخطوة الثالثة: نستنتج حل المعادلة: المعادلة لها حل وحيد هو:

$$x=\frac{-9}{-3}=3$$

2) الخطوة الأولى:

$$3.5x-7x+3.5x=-3-4$$

الخطوة الثانية:

$$0=-7$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة مستحيلة الحل.

3) الخطوة الأولى:

$$6-2x=-2x+6$$
$$-2x+2x=6-6$$

الخطوة الثانية:

$$0=0$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة تقبل عدداً لا نهائياً من الحلول.

٣. جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

٣. ١. الحل بطريقة التعويض:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى، فنحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حل وحيد فإن للجملة حلاً وحيداً نحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.

الحالة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

مثال ٥: حل كل من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}-2x+y=5\\3x-4y=-25\end{cases},\quad 2)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=-2.5\end{cases}$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$3x-4(5+2x)=-25$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$3x - 20 - 8x = -25$$

$$\Leftrightarrow 3x - 8x = -25 + 20 \Leftrightarrow -5x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-5} = 1$$

الخطوة الرابعة: تحصلنا على حل وحيد في الخطوة الثالثة، إذن للجملة حل وحيد نحصل عليه بالتعويض: $y = 5 + 2x \Leftrightarrow y = 5 + (2 \times 1) = 7$

خلاصة: حل الجملة هو: $y = 7$,$\quad x = 1$

2) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = 2$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = 2 \Leftrightarrow x - x = 2 + 2.5 \Leftrightarrow 0 = 4.5$$

الخطوة الرابعة: المعادلة مستحيلة الحل إذن الجملة مستحيلة الحل.

3) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = -2.5$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = -2.5$$

$$\Leftrightarrow x - x = -2.5 + 2.5 \Leftrightarrow 0 = 0$$

الخطوة الرابعة: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

٣. ٢. الحل بطريقة كرامير:

تعريف ٥: لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

بحيث إن المعاملات a_1 و a_2 و b_1 و b_2 والثوابت c_1 و c_2 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

نظرية ١: حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدداً لانهائياً من الحلول.

مثال ٦: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال السابق بطريقة كرامير.

الحل:

1) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=8-3=5\neq 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -25 & -4\end{vmatrix}=-20-(-25)=5$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & -25\end{vmatrix}=50-15=35$$

بما أن محدد الجملة لا يساوي الصفر إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5}{5}=1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{35}{5}=7$$

2) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{vmatrix}=1-1=0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -0.5\end{vmatrix}=-2.5-2=-4.5\neq 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحدد x لا يساوي الصفر إذن الجملة مستحيلة الحل.

3) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{vmatrix}=1-1=0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2.5 & -0.5\end{vmatrix}=-2.5-(-2.5)=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2.5\end{vmatrix}=5-5=0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحددات المجاهيل تساوي الصفر إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال ٧: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}2x+3y=4\\ x-y=-3\end{cases},\quad 2)\begin{cases}3x+2y=12\\ 5x-3y=1\end{cases},\quad 3)\begin{cases}2x+8y=4\\ x+4y=14\end{cases}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-4-(-9)=5,\qquad D_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5}{-5}=-1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-9-10=-19\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}12 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-36-2=-38,\qquad D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3-60=-57$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-38}{-19}=2,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-57}{-19}=3$$

$$3)\ D=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-8=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 14 & 4\end{vmatrix}=16-112=-96\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل.

٤. جمل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل:

رغم أنه يمكن تعميم طريقة التعويض إلى هذه الحالة إلا أننا سنكتفي بطريقة كرامير وذلك لسهولتها.

تعريف٦: ليكن لدينا جملة 3 معادلات خطية ذات 3 مجاهيل x و y و z على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned}$$

بحيث إن المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 و c_1 و c_2 و c_3 والثوابت d_1 و d_2 و d_3 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

نظرية٢: حل جملة المعادلات الخطية ذات 3 مجاهيل للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدداً لانهائياً من الحلول.

مثال ٨: حل جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\3x+2y+2z=13\end{cases},\quad 2)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\-x-2y\quad=4\end{cases},\quad 3)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\-x-2y\quad=-5\end{cases}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\13&2&2\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}6&1&1\\11&3&1\\13&2&2\end{matrix}\right|\begin{matrix}6&1\\11&3\\13&2\end{matrix}=36+13+22-39-12-22=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\3&13&2\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&6&1\\2&11&1\\3&13&2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&6\\2&11\\3&13\end{matrix}=22+18+26-33-13-24=-4$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\3&2&13\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&1&6\\2&3&11\\3&2&13\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=39+33+24-54-22-26=-6$$

إذن للجملة حل وحيد ($D\neq 0$) هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2}{-2}=1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-4}{-2}=2,\qquad z=\frac{D_z}{D}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=0-1-4-(-3)-(-2)-0=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\4&-2&0\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}6&1&1\\11&3&1\\4&-2&0\end{matrix}\right|\begin{matrix}6&1\\11&3\\4&-2\end{matrix}=0+4-22-12-(-12)-0=-18\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل (لأن $D=0,\quad D_x\neq 0$)

$$3)\ D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=0-1-4-(-3)-(-2)-0=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\-5&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&1&1\\11&3&1\\-5&-2&0\end{vmatrix}\begin{matrix}6&1\\11&3\\-5&-2\end{matrix}=0-5-22-(-15)-(-12)-0=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\-1&-5&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&1\\2&11&1\\-1&-5&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&6\\2&11\\-1&-5\end{matrix}=0-6-10-(-11)-(-5)-0=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\-1&-2&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&6\\2&3&11\\-1&-2&-5\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\-1&-2\end{matrix}=-15-11-24-(-18)-(-22)-(-10)=0$$

إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول (لأن $D=D_x=D_y=D_z=0$)

تمارين (٤- ٣)

تمرين١: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}2x-3y=1\\-x+4y=0\end{cases},\quad 2)\begin{cases}4x+2y=-8\\-x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+4y=0\\x-2y=5\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}4x+5y=9\\-x+3y=2\end{cases},\quad 5)\begin{cases}4x-5y=-9\\-8x+10y=18\end{cases},\quad 6)\begin{cases}4x-5y=-9\\-2x+2.5y=0\end{cases}$$

تمرين٢: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}x+y+z=6\\-x+2y-z=0\\2x-3y+4z=2\end{cases},\quad 2)\begin{cases}3x+5y-z=10\\-x+2y+z=11\\5x+y-3z=-12\end{cases},\quad 3)\begin{cases}x-z=12\\-3x+2y=-3\\-6x+2y+3z=10\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}x+2z=13\\-y+z=5\\x-y=0\end{cases},\quad 5)\begin{cases}-x+2y-z=-2\\x+15y-3z=11\\-y+2z=3\end{cases},\quad 6)\begin{cases}y+z=0\\x+y-z=10\\x+2y=-12\end{cases}$$

الوحدة الخامسة

مفهوم الدالة ومنحناها

الهدف العام :

معرفة مفهوم الدالة وأنواعها ، وبعض الدوال العددية المشهورة ، والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف التفصيلية :

بعد دراسة هذه الوحدة يتمكن المتدرب من معرفة :

١. الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها .
٢. أنواع الدوال المختلفة .
٣. الدوال العددية .
٤. بعض الدوال الجبرية المشهورة .
٥. تمثيل منحنيات الدوال.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تُدرس كمفهوم رياضي إلا حديثاً.

ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

١. تعريف الدالة

تعريف ١: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

حيث أنّ $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $y = f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول أن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

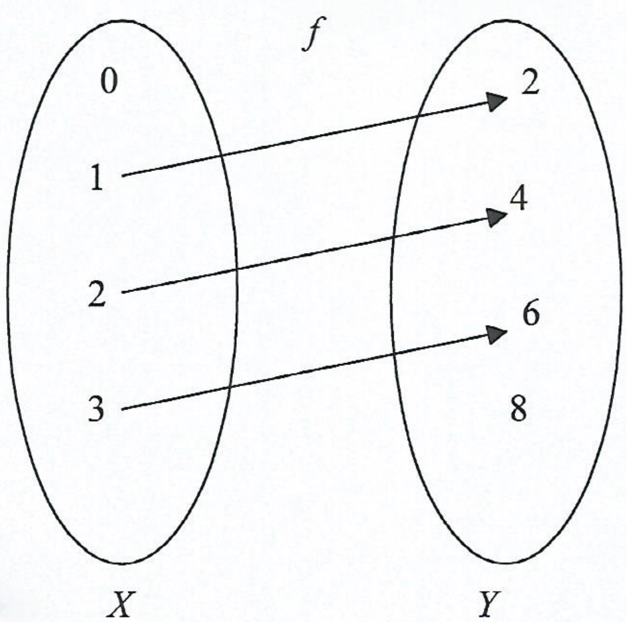
تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

مثال ١: المجموعتان التاليتان:

$X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

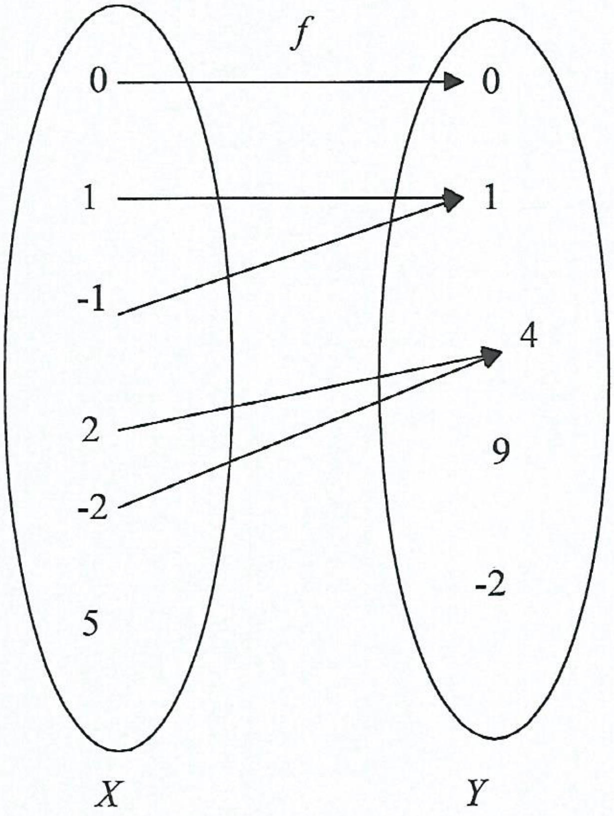
العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي: $f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

مثال ٢: المجموعتان التاليتان: $X=\{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y=\{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0)=0,\ f(1)=f(-1)=1,\ f(2)=f(-2)=4$$



العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y :

العناصر 0 و 1 و 1− و 2 و 2− في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أنّ $f(5)$ غير معرفة في Y.

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:

كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$f:X\to Y$ حيث: $f(x)=x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأنّ f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف ١:

$$x_1=x_2\Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

مثال ٣: المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأنّ كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries*

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلده الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries* .

مثلاً:

$$f(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers) = Algeria$$
$$f(Cairo) = Egypt$$
$$f(London) = United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثال ٤: المجموعتان السابقتان: *Cities* و *Countries* والعلاقة g من *Cities* إلى *Countries* بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

العلاقة g دالة لأنّ كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries* .

مثلاً:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(Algiers) = Algeria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثال ٥: المجموعتان السابقتان *Countries* والعلاقة f من *Countries* إلى *Cities* بحيث: $f(x)$ هو مدينة من البلد x .

هذه العلاقة ليست دالة؛ لأنه مثلاً: البلد *Saudi Arabia* في علاقة مع أكثر من مدينةواحدة.

تعريف ٢:

مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ويرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f

مدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة، ويرمز لمدى الدالة بالرمز R_f

مثال ٦: حدّد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة ١ إلى ٤ ومداها.

الحل:

$$1)\ D_f = \{1,2,3\}, \qquad R_f = \{2,4,6\}$$
$$2)\ D_f = \{0,1,-1,2,-2\}, \qquad R_f = \{0,1,4\}$$

٣) إذا اعتبرنا مجموعة العواصم *Capitals* فسيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$

$$4)\ D_g = Cities \qquad R_g = Countries$$

مثال ٧: مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بيّن أنّ f دالة.	٢) حدّد مجال f ومداها.	٣) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

١) f دالة لأنّ:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

٢) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذن: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

٣) $f(5) = 2\times 5 = 10$ و $f(14) = 2\times 14 = 28$.

مثال ٨: مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x) = 2x$.

١) بيّن بأنّ g دالة.	٢) حدّد مجال g ومداها.	٣) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

١) g دالة لأنّ:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

٢) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذن: $D_g = \mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذن: $R_g = \mathrm{R}$ لأنّ:

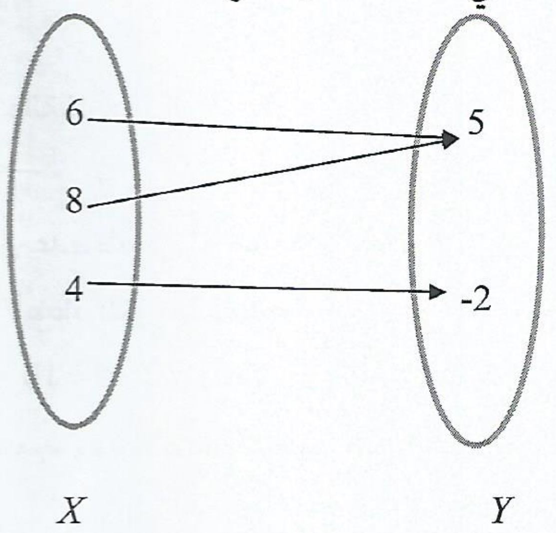
$y = 2\times\frac{y}{2} = 2\left(\frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{y}{2}\right)$. مثلا: $3 = g(1.5)$ و $0.6 = g(0.3)$

٣) $g(2.5) = 2\times 2.5 = 5$ و $g(5) = 2\times 5 = 10$

٢. أنواع الدوال

تعريف ٣: الدالة $f : X \to Y$ تسمى دالة شاملة (غامرة) هي الدالة التي يرتبط كل عنصر من مجالها المقابل بعنصر واحد على الأقل من المجال أي أنّ : $R_f = Y$ أي أنّ المدى المصاحب للدالة يساوي المدى للدالة .

مثال ٩: الدالة الممثلة بالمخطط السهمي التالي دالة شاملة (تغامر)



لدينا $R_f = \{-2, 5\}$ و $Y = \{-2, 5\}$

إذن المجال المصاحب $Y = R_f$ المدى،

أي أنّ كل عنصر من مجالها المقابل مرتبط بعنصر واحد على الأقل من المجال .

هذا يعنى أنّ الدالة شاملة (تغامر).

مثال ١٠: أثبت أنّ الدالة $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ والمعرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 1$ دالة شاملة .

الحل :

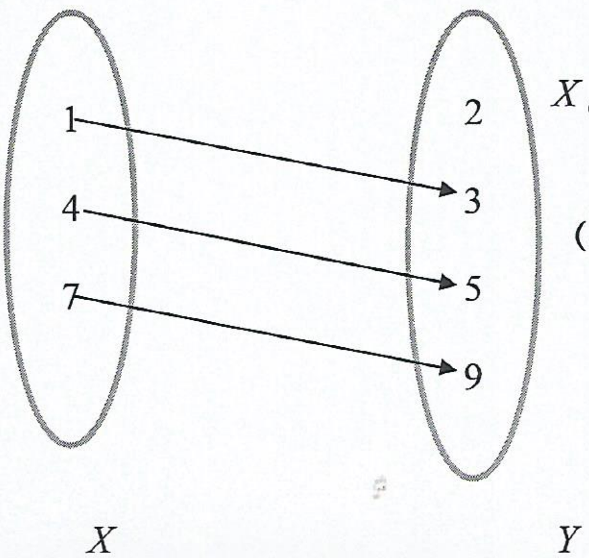
لدينا $Y = \mathrm{R}$ و $R_f = R$ إذن المجال المصاحب $Y = R_f$ المدى، هذا يعنى أنّ الدالة شاملة .

تعريف ٤: الدالة $f : X \to Y$ تسمى دالة متباينة (أحادية) هي الدالة المحققة للشرط التالي :

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ لكل x_1, x_2 من مجال الدالة

بمعنى إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ فإن $x_1 = x_2$ أو اذا كان $x_1 \neq x_2$ فإن $f(x_1) \neq f(x_2)$

مثال ١١: الدالة الممثلة بالمخطط السهمي التالي دالة متباينة (أحادية)



نلاحظ أنه كلما اختلفت العناصر من X فان صورها المناظرة من Y مختلفة وبالتالي فإن الدالة متباينة (أحادية)

مثال ١٢: أثبت أن الدالة $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ والمعرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 1$ متباينة

الحل :

نفرض أنّ $f(x_1) = f(x_2)$ إذن $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ وهذا يعني أنّ $2x_1 = 2x_2$

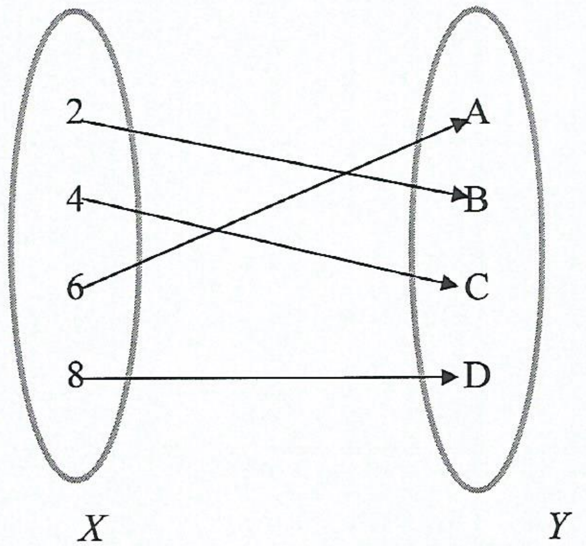
ومنه فإن $x_1 = x_2$

أي أنه إذا تساوت الصور فإنه لا بدى أن تتساوى الأصول .

إذن الدالة $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ والمعرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 1$ متباينة .

تعريف ٥: الدالة $f : X \to Y$ تُسمى دالة متقابلة إذا كانت شاملة ومتباينة في آن واحد .

مثال ١٣: الدالة الموضحة بالمخطط السهمي الآتي دالة متقابلة



واضح أن الدالة شاملة لأن $R_f = Y$ أي أن المجال المصاحب يساوي المدىكذلك متباينة لأنه إذا اختلفت العناصر فإن صورها المناظرة مختلفةومنه فإن الدالة متقابلة .

مثال ١٤: أثبت أنّ الدالة $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ والمعرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 1$ متقابلة

الحل :

من المثال ١٠ الدالةشاملة ومن المثال ١٢ الدالة متباينة

إذن الدالة متقابلة

٣. الدوال العددية

تعريف ٦: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال ١٥: كل الدوال التالية هي دوال عددية.

1) $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x+1$, 2) $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x+1$

3) $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$, 4) $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^2$

5) $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt{x}$, 6) $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$

تعريف ٧: نقول عن دالة إنها:

١) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$

٢) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$

مثال ١٦: هل الدوال المعرفة في المثال السابق فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

1) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنّ:

$$f(-x)+f(x)=(-x)+1+x+1=2\neq 0$$
$$f(-x)-f(x)=(-x)+1-(x+1)=-x+1-x-1=-2x\neq 0$$

2) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

3) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=x^2$ زوجية لأنّ:

$$f(-x)-f(x)=(-x)^2-x^2=x^2-x^2=0$$

4) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=x^2$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

5) الدالة $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$

6) الدالة $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنّ مجالها لا يحتوي على الأعداد السالبة (السبب السابق).

٤. منحنى الدالة

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يُسمى بالمستوى الديكارتي وذلك باتباع الخطوات التالية:

١) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y=f(x)$ الموافقة لها.

٢) رسم النقاط (x,y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

٣) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة.

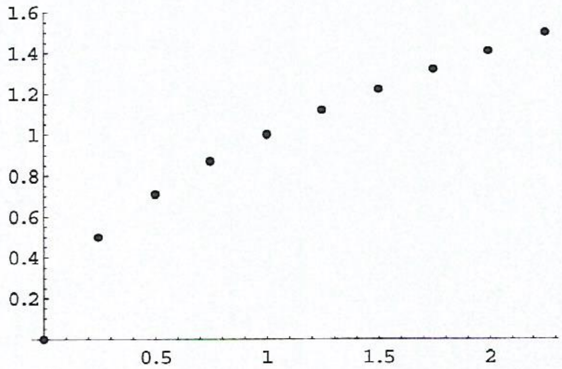
مثال ١٧: مثل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$

الحل:

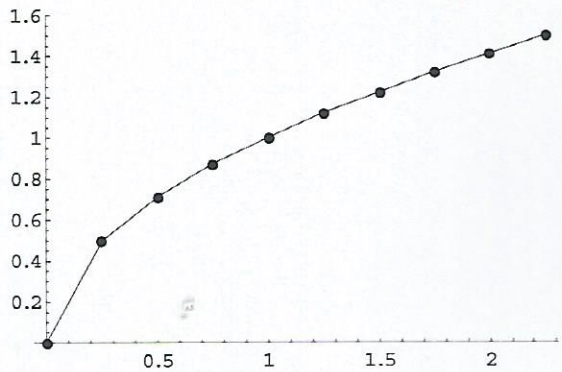
الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
$y=\sqrt{x}$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



تجدر الإشارة إلى أنه كلما كان جدول القيم أكثر دقة وأكثر قيماً كلما كان التمثيل أدق..

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءاً مما يسمى منحنى الدالة.

٥. الدوال الجبرية:

تعريف ٧: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة (المطولة).

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضاً.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

٥. ١. الدالة الثابتة: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a$ و a عدد حقيقي ثابت.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

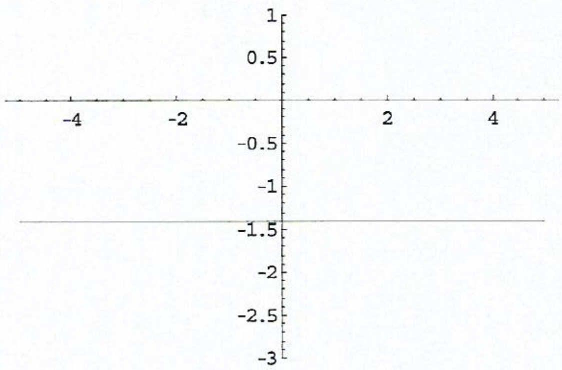
٢) $R_f=\{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.

٣) $f(-x)=f(x)$ أي أنها زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ١٨: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}$

الحل:



٢.٥. الدالة الخطية: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x+b$ و a,b عددان حقيقيان ثابتان و $a\neq 0$ أي أنها كثير حدود من الدرجة الأولى.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

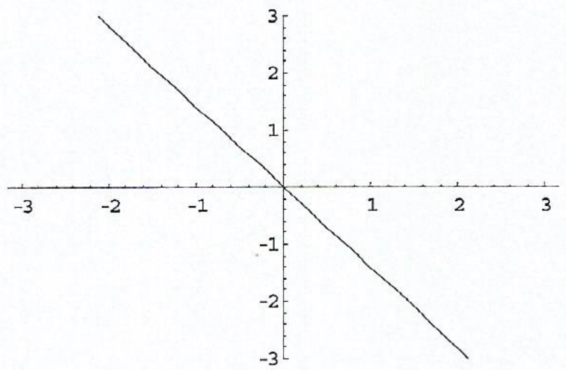
٢) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة المبدأ إذا كانت $b=0$ و بخط مستقيم مائل يمر من النقطة $(0,b)$ إذا كانت $b\neq 0$

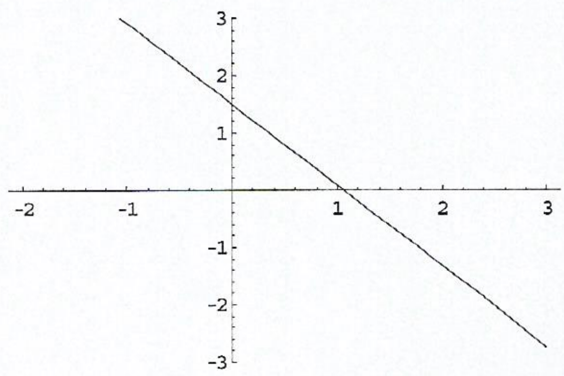
مثال١٩: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x$

الحل:



مثال٢٠: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x+1.5$

الحل:



٥. ٣. الدالة التربيعية: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ و $a\neq 0$ و b و c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

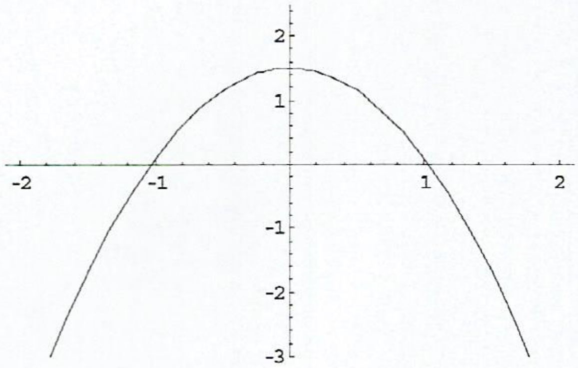
٢) $R_f\neq\mathrm{R}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b=0$

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة المبدأ إذا كان $b=c=0$

مثال ٢١: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x^2+1.5$

الحل:



٥. ٤. الدالة الكسرية: وهي عبارة عن كسر بسطه ومقامه كثيرات حدود.

وسنأخذ كمثال لها الدالة: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

ومن خواصها:

١) $D_f=\mathrm{R}-\{1\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

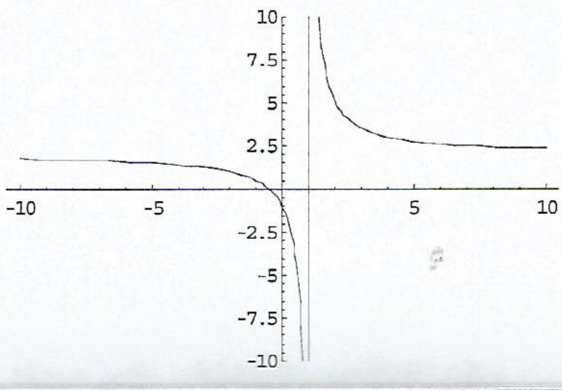
٢) $R_f=\mathrm{R}-\{2\}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية.

٣) ليست فردية ولا زوجية.

٤) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي مكافئ لا يمر من نقطة المبدأ.

مثال ٢٢: مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$

حيث $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$



تمارين (٥- ١)

تمرين١: بين أنّ كلاً من العلاقات التالية دوال:

1) $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = x^3,$ 2) $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = \sqrt[3]{x},$

3) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x^3 + 1,$ 4) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

تمرين٢: حدّد مجال كل دالة من التمرين ١ ومداها:

تمرين٣: هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

1) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = 2x^2 + 3$ 2) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x^3$ 4) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = |x|.$

تمرين٤: مثّل بيانيا كلاً من الدوال التالية:

1) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = 2x^2 + 3$ 2) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x^3$ 4) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = |x|.$

المراجع

اسم المرجع	المؤلف
معجم الرياضيات المعاصرة	صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٤٠٣هـ - ١٩٨٣م.
نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات	علي عبد الله الدفاع، نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات، دار جون وايلي وأبناؤه، نيويورك، ١٩٨٧م.
حساب التفاضل والتكامل	د.محمد عادل سودان، د.سلمان عبد الرحمن السلمان، د.إبراهيم ديب سرميني (١٩٩٤) مطبعة جامعة الملك سعود، الرياض
Mathematics for scientific and technical students	Gwyn Davies and Gordon Hick, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.
A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750	Anders Hald, John Wiley and Sons, New York, 1989.
Theory of Linear and Integer Programming	Alexander Schrijver, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.
Matrix theory with Application	Goldberg,J.(1991).New York.McGrawn-Hill,Inc
Discrete Mathematics	Seymour Lipschutz and Marc Lipson, McGraw-Hill, New York, 1997.
An introduction to Discrete Mathematics	Steven Roman,Harcourt Brace jovnovich,Publishers,New York,1998
Basic Mathematics	Peter Tebbutt, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.